

الأستاذ

فى

الرياضيات

للفف الثالث الإعدادى

إعداد

أ / أشرف حسن عبده

٠١٢٢٧٢٧٨٠٨٤

الحبر



بيانات الطالب

الإسم /

الصف /

المدرسة /

العام الدراسي /

رقم التليفون /

هنا أنت دائما في المقدمة

١

العلاقات والدوال

الزوج المرتب: (مستط أول ، مستط ثانياً)

إذا كان $(س، ص) = (ب، پ)$ فإن $س = ب$ ، $ص = پ$

امثلة محلولة: أوجد قيمة $ب، پ$ إذا كان:

$$① (ب، ٧) = (٣، پ) \quad ③ (٢، ٣) = (٢، ١٢٥)$$

$$٧ = پ \quad ٣ = ب \quad ١٢٥ = ٣$$

$$٢ = ٢ - ب \quad ٥ = پ$$

$$② (٣، ٥) = (١ + ب، ٢ - پ)$$

$$٣ = ١ + ب \quad ٥ = ٢ - پ$$

$$٢ = ب \quad ٧ = پ$$

نكتب في الحصة

$$(٤، ٦) = (١ - ب، ٣ - پ)$$

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين

$$س \times ص = \{ (ب، پ) : ب \in س، پ \in ص \}$$

مثال: إذا كان $س = \{٥، ٣\}$ ، $ص = \{٤، ٣، ٢\}$

فأوجد $س \times ص$ ، $ص \times س$

الحل

$$س \times ص = \{ (٤، ٥)، (٣، ٥)، (٢، ٥)، (٤، ٣)، (٣، ٣)، (٢، ٣) \}$$

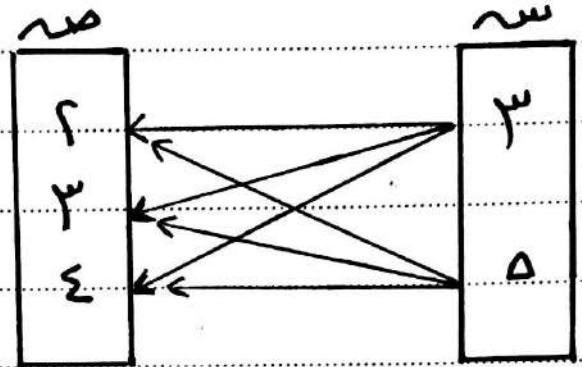
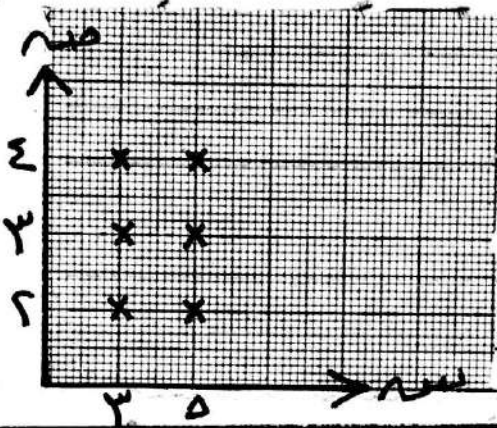
$$ص \times س = \{ (٥، ٤)، (٣، ٤)، (٥، ٣)، (٣، ٣)، (٥، ٢)، (٣، ٢) \}$$

$$\text{ملحوظة: } س \times (ص \times س) = (س \times ص) \times س$$

عدد الأزواج المرتبة لحاصل الضرب $S \times S =$

عدد عناصر $S \times$ عدد عناصر S

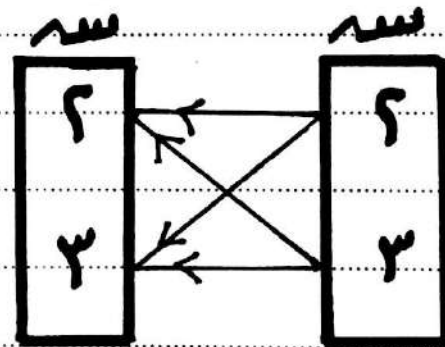
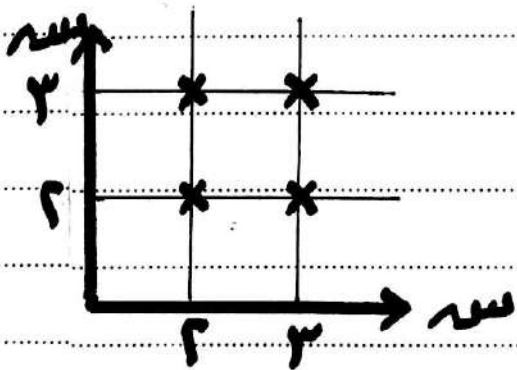
المخطط السهمي المخطط البيان (الديكارتي)



تمثيل: إذا كان $S = \{2, 3\}$ فوجد S^2 ، $S \times S$ (سنة)
وادرسة المخطط السهمي والبيان

الحل

$$S^2 = S \times S = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$



ملاحظة:

١) إذا كان $(a, b) \in S \times S$ فإن $a \in S$ و $b \in S$

٢) $(S \times S) \times S = (S \times (S \times S)) = S \times (S \times S)$

٣) $S \times S \neq S \times S$

٤) $\phi \times S = \phi = S \times \phi$

٥) $(\phi \times S) \cap (S \times \phi) = \phi$

أمثلة محلولة

- ١ إذا كان $\text{نه}(\text{سه}) = 3$ ، $\text{نه}(\text{صه}) = 5$ فإن $\text{نه}(\text{سه} \times \text{صه}) = 15$
- ٢ إذا كان $\text{نه}(\text{سه}) = 2$ ، $\text{نه}(\text{صه}) = 8$ فإن $\text{نه}(\text{صه}) = 8$
- ٣ إذا كان $(\text{ت}، \text{ث}) = (9، 8)$ فإن $2 = 9$ ، $4 = 8$ ، $3 \pm = 4$
- ٤ $\{(2، 4)\} = \{2\} \times \{2\}$
- ٥ إذا كان $(3، 5) \supseteq \text{سه} \times \text{صه}$ فإن $(5، 3) \supseteq \text{صه} \times \text{سه}$
- ٦ إذا كان $(5، 3) \supseteq \{6، 3\} \times \{8، 5\}$ فإن $\text{سه} = 5$
- ٧ إذا كان $\text{نه}(\text{سه}) = 9$ فإن $\text{نه}(\text{سه}) = 3$
- ٨ إذا كان $\text{سه} \times \text{صه} = \text{صه} \times \text{سه}$ فإن $\text{سه} = \text{صه}$
- ٩ $\{(5، 5)\} = \{5\} \times \{5\}$
- ١٠ إذا كان $\text{سه} = \{4، 3\}$ فإن $\text{نه}(\text{سه} \times \phi) = \text{صفر}$
- ١١ إذا كان $(\text{سه} - 11، 1) = (8، \text{صه} + 3)$ فإن $\overline{\text{سه} + 3} = 5$
- ١٢ إذا كان $\text{سه} = \{7، 5\}$ ، $\phi = \text{صه}$ فإن $\text{سه} \times \text{صه} = \phi$

تدريب:

- ١٣ إذا كان $\text{نه}(\text{سه}) = 3$ ، $\text{نه}(\text{صه}) = 2$ فإن $\text{نه}(\text{سه} \times \text{صه}) =$
- ١٤ إذا كان $\text{نه}(\text{سه} \times \text{صه}) = 15$ ، $\text{نه}(\text{صه}) = 5$ فإن $\text{نه}(\text{سه}) =$
- ١٥ إذا كان $\text{سه} = \{2، 5\}$ ، $\text{صه} = \{5، 2\}$ فإن $\text{سه} \times \text{صه} =$
- ١٦ إذا كان $\text{صه} \times \text{سه} = \{(2، 2)، (1، 2)، (1، 4)، (3، 4)\}$ فإن $\text{سه} =$
- ١٧ إذا كان $\text{نه}(\text{سه} \times \text{صه}) = 6$ ، $\{7، 5\}$ فإن $\text{نه}(\text{صه}) =$
- ١٨ $\{5\} \times \{3\} =$
- ١٩ إذا كان $\text{سه} = \{7\}$ ، صه مجموعة خالية فإن $\text{سه} \times \text{صه} =$
- ٢٠ إذا كان $\text{سه} = \{4، 3\}$ ، $\text{صه} = \{5، 4\}$ ، $\text{ع} = \{5، 6\}$ فادرج
- $\text{سه} \times (\text{صه} \cap \text{ع})$ ، $(\text{سه} - \text{صه}) \times \text{ع}$
- $(\text{سه} \cup \text{صه}) \times (\text{ع} \cap \text{سه})$ ، $(\text{سه} - \text{صه}) \times (\text{ع} - \text{سه})$

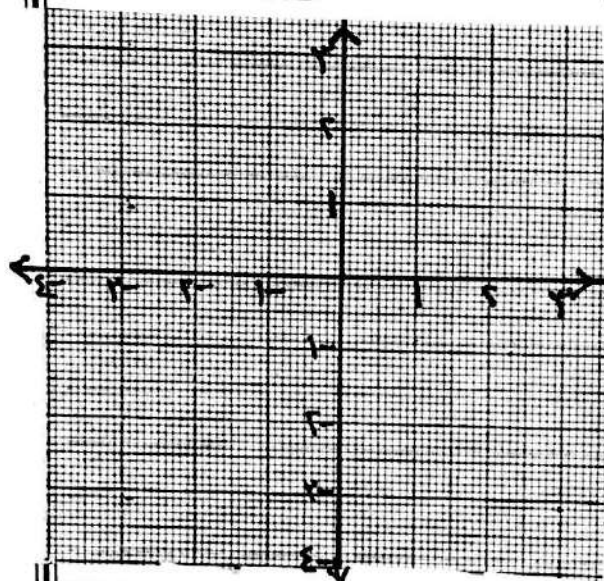
حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات الغير منتهية

ط × ط ص × ص ن × ن

وفندرس ح × ح

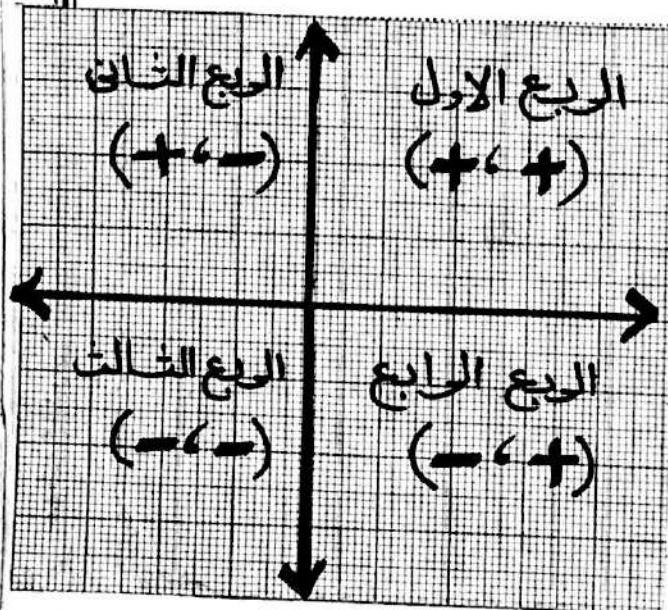
مثال

كون شبكة تربيعية متعامدة x و y كما اكمل:



- ١) أ (٢، ٣) يقع في الربع ...
- ٢) ب (١، -٢) يقع في الربع ...
- ٣) ج (-٢، -٣) يقع في الربع ...
- ٤) د (-٣، -٤) يقع في الربع ...
- ٥) هـ (٣، -٤) يقع في محور ...
- ٦) ز (٠، ٢) يقع في محور ...
- ٧) ح (-٢، ١) يقع في الربع ...

توضيح هام:



(٠، ٢) تقع على

محور السينات

(٢، ٠) تقع على

محور الصادات

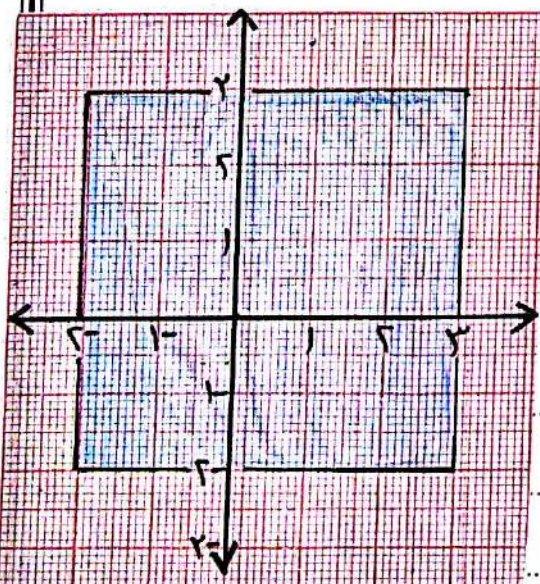
تمارين

- ١ النقطة $(٤, -٤)$ تقع في الربع
- ٢ النقطة $(٩, ٧)$ تقع في الربع
- ٣ النقطة $(٧, -٦٣)$ تقع في الربع
- ٤ النقطة $(٠, ٤)$ تقع على محور
- ٥ النقطة $(٩, ٠)$ تقع على محور
- ٦ النقطة $(-\frac{١}{٥}, -\frac{٣}{٧})$ تقع في الربع
- ٧ اذا كان $(٧, ٣ - ٢)$ تقع على محور السينات فيان $٢ = \dots$
- ٨ اذا كان $(٥ + ٤, ٢)$ تقع على محور السينات فيان $٤ = \dots$
- ٩ اذا كان $(٢, ٢)$ تقع في الربع الثاني فيان ٢ ب صفر
- ١٠ اذا كان $(٢, ٢)$ تقع في الربع الثالث فيان ٢ ب صفر

تمرين هام

اذا كان $س = [-٣, ٢]$

حدد المنطقة التي تمثل $س$
 أي النقطة الآتية $\Rightarrow س$



$(٣, ١)$	$(٥, ٢)$
$(٢, ٣)$	$(٢, -٢)$
$(٣, -٠)$	$(٠, ٢)$
$(٢, -٣)$	$(٤, ٢)$
$(٣, -٣)$	$(٣, ٣)$

تمرين

اذا كان $س = [-١, ٢]$ ، $ص = [-٢, ٠]$ أوجد

المنطقة التي تمثل كل من:

$س \cap ص$ ، $س \cup ص$ ، $ص \setminus س$ ، $س \setminus ص$

٦

العلاقة والدالة

١) إذا كان $س = \{١, ٢, ٣\}$ ، $ص = \{٣, ٤, ٥\}$ وكانت

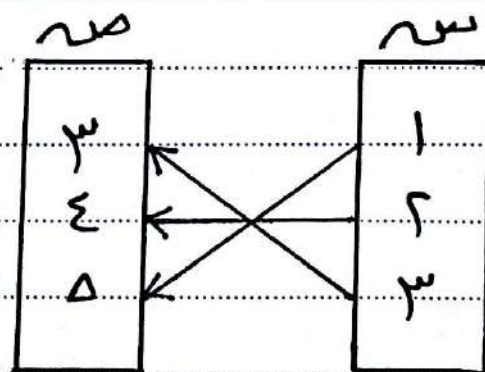
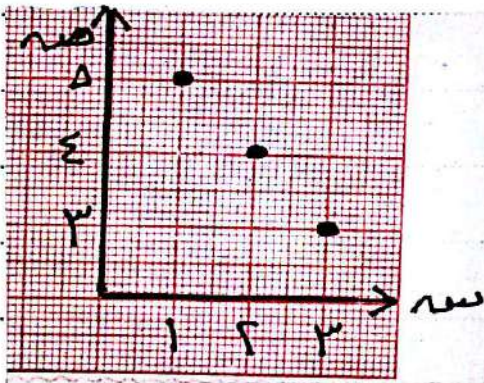
علاقة من $س$ إلى $ص$ حيث $م \in ن$ تعني $٦ = ٣ + ٣$

لكل $٣ \in س$ ، $٣ \in ص$. أكتب بيان ع ومثلها بخطط سهمي

حل ع دالة مع ذكر السبب . أوجد المدى

الحل

$$٦ = ٣ + ٣$$



بيان ع = $\{(١, ٣), (٢, ٤), (٣, ٥)\}$

ع دالة لأن كل عنصر من $س$ يخرج منه سهم واحد فقط

المدى = $\{٣, ٤, ٥\}$

مجموعة جزئية من $ص$ \times $ص$

٧

٢ إذا كان $S = \{1, 2, 3\}$ ، $V = \{1, 4, 6, 9\}$

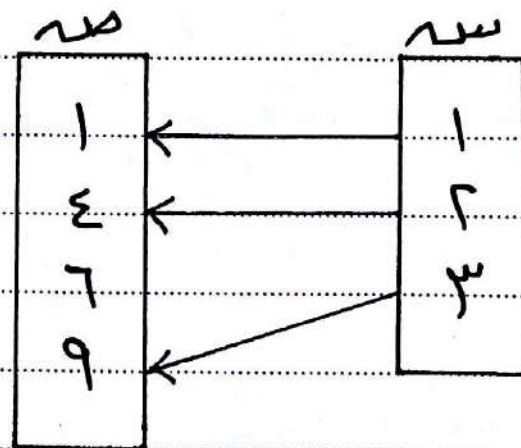
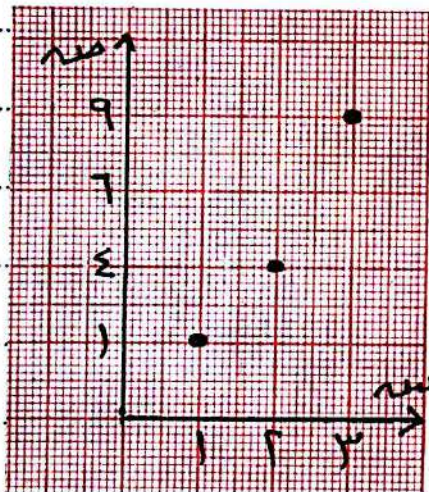
وكانت E علاقة من S إلى V حيث $P \subset V$ تعني $U = P$

لكل $P \subset S$ ، $U \subset V$. أكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي

حل E دالة مع ذلك السبيل . أوجد المدى

الحل

$U = P$



بيان $E = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

E دالة : كل عنصر من S يخرج منه سهم واحد فقط

المدى $= \{1, 4, 9\}$

مجموعة : المدى بمجموعة جزئية V

٨

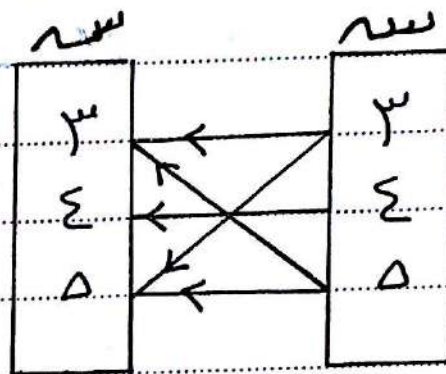
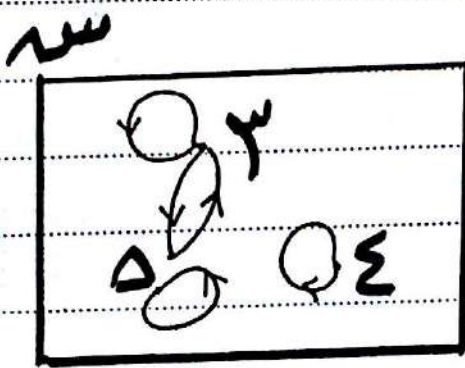
٣) اذا كان $سه = \{٥, ٤, ٣\}$ وكانت $ع$ علاقة على $سه$

حيث $م \subset ب$ تعني $م + ب =$ عدد زوجي الكل $م \supset سه, ب \supset سه$

اكتب بيان $ع$ ومثلها بمخطط سهمي. صل $ع$ بالترتيب مع ذكر السبب.

الحل

$$م + ب = \text{عدد زوجي}$$



بيان $ع = \{(٥, ٥), (٣, ٥), (٤, ٤), (٥, ٣), (٣, ٣)\}$

$ع$ ليست دالة

ملاحظة: $سه$: المجال، $صه$: المجال المقابل
المدى \Rightarrow المجال المقابل

العلاقة $ع$ \Rightarrow $سه \times صه$

تكون العلاقة من $سه$ إلى $صه$ إنخذ دالة اذا كان كل عنصر من $سه$ يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المترتبة المحددة لبيان العلاقة.

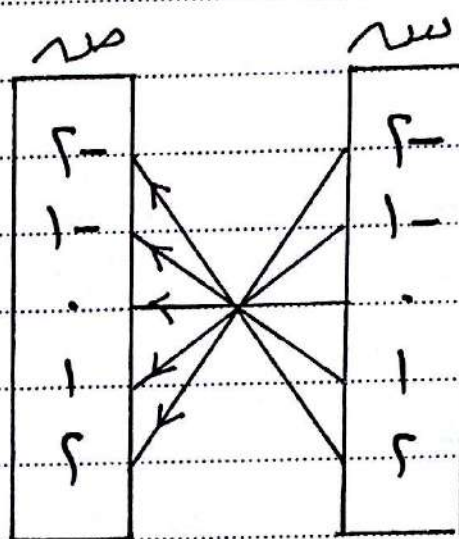
٩

٤ إذا كانت سره = {٢-، ١-، ٠، ١، ٢}

وكانت ع علاقة على سره حيث $P \subset E$ ب تعني P معكوس
 جمعي للعدد ب. لكل $P \subset سره \Rightarrow سره$. آتب بيان ع
 ومثلها بمخطط سهي. هل ع دالتا. أوجد المدى

الحل

١ معكوس جمعي ب



بيان ع = { (٢-، ٢-)، (١-، ١-)، (٠، ٠)، (١، ١)، (٢، ٢) }

ع دالتا:

المدى = {٢-، ١-، ٠، ١، ٢}

٥ إذا كانت سره = {٤، ٣، ٢}، صه = {١٥، ٨، ٩، ٦، ٥، ٣}

وكانت ع علاقة من سره إلى صه حيث $P \subset E$ ب تعني $P = ٣$
 لكل $P \subset سره \Rightarrow سره$. آتب بيان ع ومثلها بمخطط
 سهي. هل ع دالتا. اذكر المدى.

١٠

٦ إذا كانت س = {٢، ١، ١}، ص = {٢: ١، ١: ٢} وكانت ع علاقتان من س إلى ص حيث

ع ب تعني (ب = ٢ + ٤) لكل $٢ \in س$ ، $١ \in ص$ ، أتب بيان ع

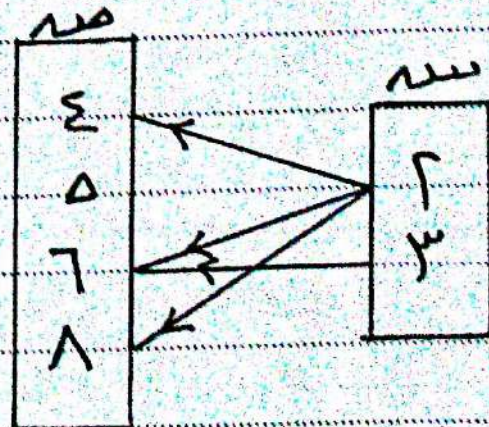
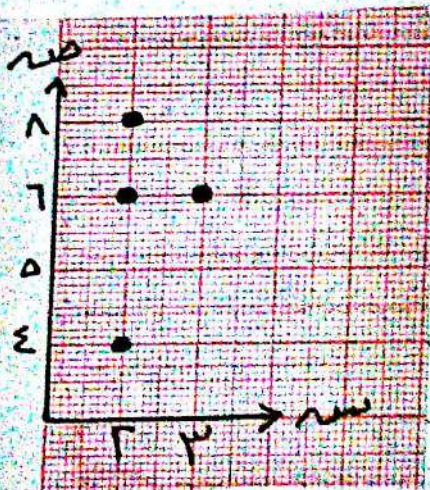
الحل
 $٢ = ٤ + ٢$

بيان ع

$\left\{ \begin{array}{l} (٢، ١) \\ (٦، ١) \\ (٨، ٢) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} ٢ = ٤ + (١) \\ ٦ = ٤ + (١) \\ ٨ = ٤ + (٢) \end{array} \right.$

٧ إذا كانت س = {٢، ٣}، ص = {٤، ٥، ٦، ٨} وكان ع ب تعني (ب عامل من عوامل ب). أتب بيان ع ومثلها بخط سهمي. صلح دالت

الحل
 ب عامل من عوامل ب



بيان ع = { (٤، ٢)، (٦، ٢)، (٨، ٢)، (٦، ٣) }

فلا حظ أن العنصر آ من س خرج منه أكثر من سهم

ع غير دالت

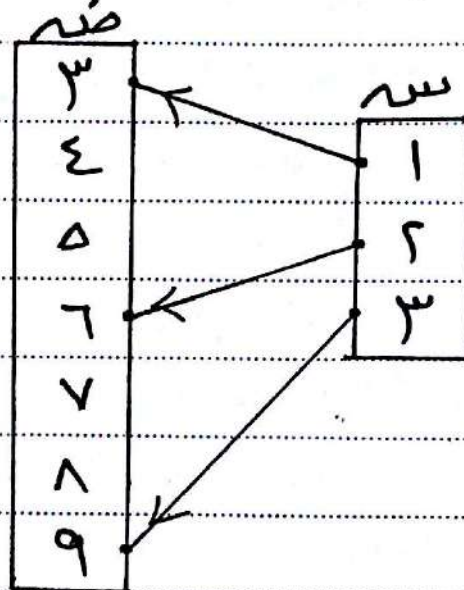
٨ إذا كانت سهر = {١، ٢، ٣} ، صهر = {١، ٢، ٣} ، طهر = {١، ٢، ٣} ، عهر = {١، ٢، ٣} ،
ع علاقتهم من سهر إلى صهر حيث $P = \frac{1}{3}$ (ب) $P = \frac{1}{3}$
أكتب بيان ع ومثلها بخط سهر. حل ع دالتا. أوجد المدي

الحل

$$P = \frac{1}{3}$$

ملحوظة

$$= (٢، ٦) \\ \text{ع} ٦$$



بيان ع = {١، ٢، ٣} ، (٢، ٦) ، (٣، ٩)

ع دالتا: كل عنصر من سهر يخرج منه سهر واحد فقط
المدي = {١، ٢، ٣}

٩ إذا كانت سهر = {١، ٢، ٣} ، وكانت ع علاقتهم على

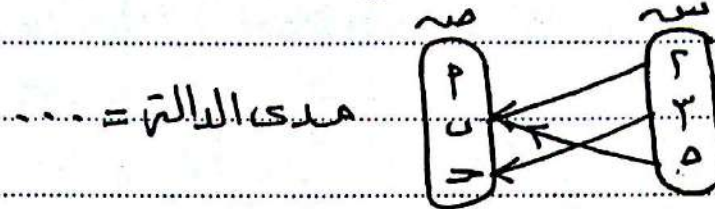
سهر حيث $P = \frac{1}{3}$ (ب) يقبل القسمة على ٣

أكتب بيان ع ومثلها بخط سهر. حل ع دالتا. أوجد المدي



١ مدى الدالة هو مجموعة جزئية من ...

٢ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...



٣ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

تقني $f = u + p$ فكتب بيان f ومثلها بمخطط سهمي. هل f دالة

٤ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

وكان f علاقة من u الى v حيث $f = u + p$ تقني $u > v$

لكل $u \in u, v \in v$. اكتب بيان f ومثلها بمخطط سهمي

وأخبر بياني. هل f دالة. ولما اذا؟

٥ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

تقني $f = u + p$ فكتب بيان f . اكتب بيان f . هل f دالة. المدي

٦ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

$f = u + p$. اكتب بيان f والمخطط السهمي. هل f دالة.

٧ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

بيان f ومثلها بمخطط سهمي. حيث $f = u + p$ $10 = u + p$

٨ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

$u > p$. اكتب بيان f ومثلها بمخطط سهمي وأخبر بياني

٩ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

$f = u + p$. اكتب بيان f ومثلها بمخطط سهمي. هل f دالة

١٠ اذا كان f دالة بيانها $= \{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ فان مداها = ...

س. اكتب بيان f ومثلها بمخطط سهمي وأخبر بياني

دوال كثيرات الحدود

دالة كثيرة الحدود: هي دالة قاعدتها حد أو مقدار
مجالها ح، مجالها المقابل ح، الاس عدد طبيعي

درجة الدالة: قيمة أكبر أس للمتغير في قاعدة الدالة
كامل:

① د (س) = $٢س - ٣$ من الدرجة ١، د (٥) = ٧

② د (س) = $٧س - ٣س$ من الدرجة ١، د (٢) = ١٠

③ د (س) = ٣ من الدرجة ٠، د (٠) = ٣، د (٣) = ٣

④ د (س) = $٢س + ٥س$ من الدرجة ١، د (١) = ٧

⑤ د (س) = $(٢س - ٢)$ من الدرجة ١، د (٥) = ٨

⑥ د (س) = $(٢س - ٢س)$ من الدرجة ١، د (٥) = ١٠

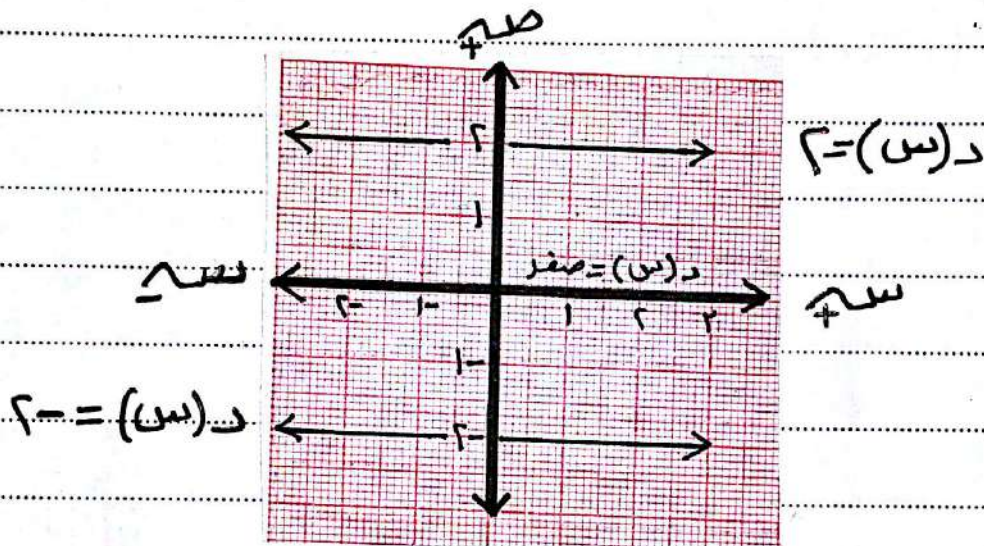
⑦ د (س) = $٣س - ٥س$ من الدرجة ١، د (٥) = ١٠

⑧ إذا كان د (س) = $٢س + ٤$ ، د (١) = ٦ فإن ٢ = ٦

⑨ إذا كان د (س) = $٥س - ١$ ، د (٢) = ٩ فإن ٢ = ٩

١ الدالة الثابتة

الدالة $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $D(x) = P$ ، $P \in \mathbb{R}$
 تسمى دالة ثابتة من الدرجة صفر وتمثل بخط
 مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة $(P, 0)$



الكل:

$D(x) = 3$ تمثل بخط ... يوازي محور ...
 ويمر بالنقطة $(0, 6)$

ملحوظة: الدالة $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $D(x) = P$ ، $P \in \mathbb{R}$

تمثل بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل $(0, 0)$

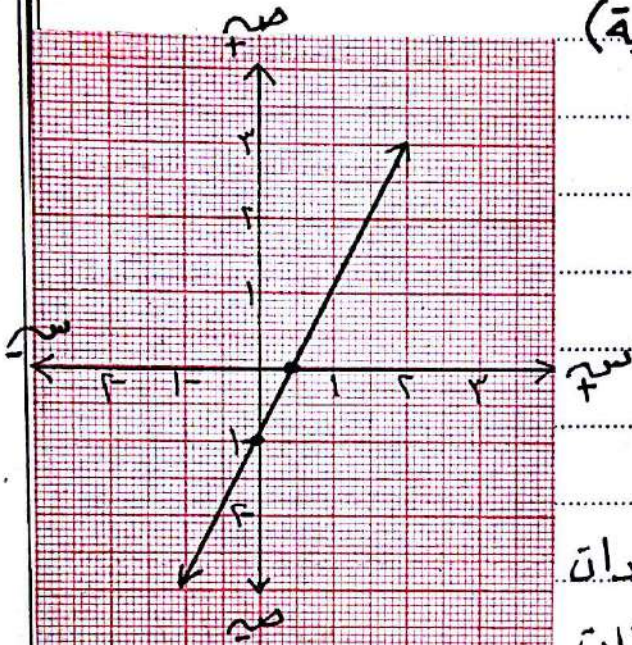
تمثيل: $D(x) = 5$ تسمى دالة ... تمثل بخط ...
 يوازي محور ... ويمر بالنقطة $(0, 5)$ قاطعاً محور

المصادات عند ...

٢ الدالة الخطية

الدالة د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $D = \{x \mid x \neq 6\}$ ب $P = 6$.
 تمثل بيانياً بصيغتين يقطع محور السينات في النقطة
 $(-\frac{6}{5}, 0)$ ويقطع محور الصادات في النقطة $(0, 6)$.

مثال: مثل بيانياً د (س) = $2 - 3$
 الحل (آلة حاسبة)



س	ص
0	2
2/3	0

$(0, 2)$ $(\frac{2}{3}, 0)$

$(0, 2)$ تقاطع المستقيم مع محور الصادات

$(\frac{2}{3}, 0)$ تقاطع المستقيم مع محور السينات

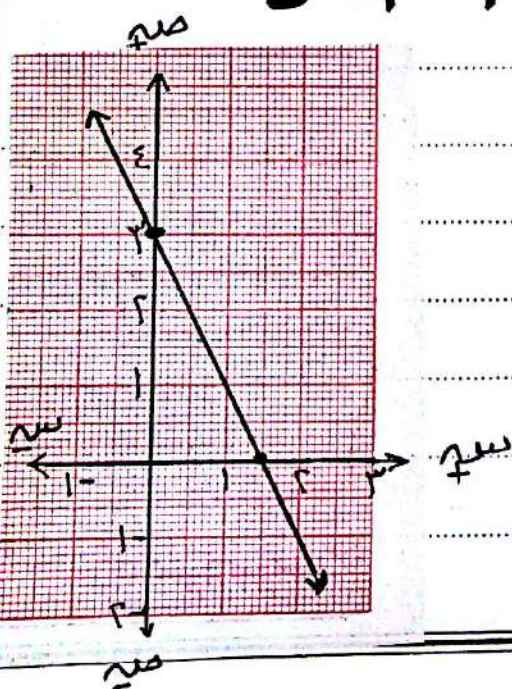
مثال: مثل بيانياً د (س) = $3 - 2$

الحل

د (س) = $3 - 2$

س	ص
0	3
3/2	0

$(0, 3)$ $(\frac{3}{2}, 0)$

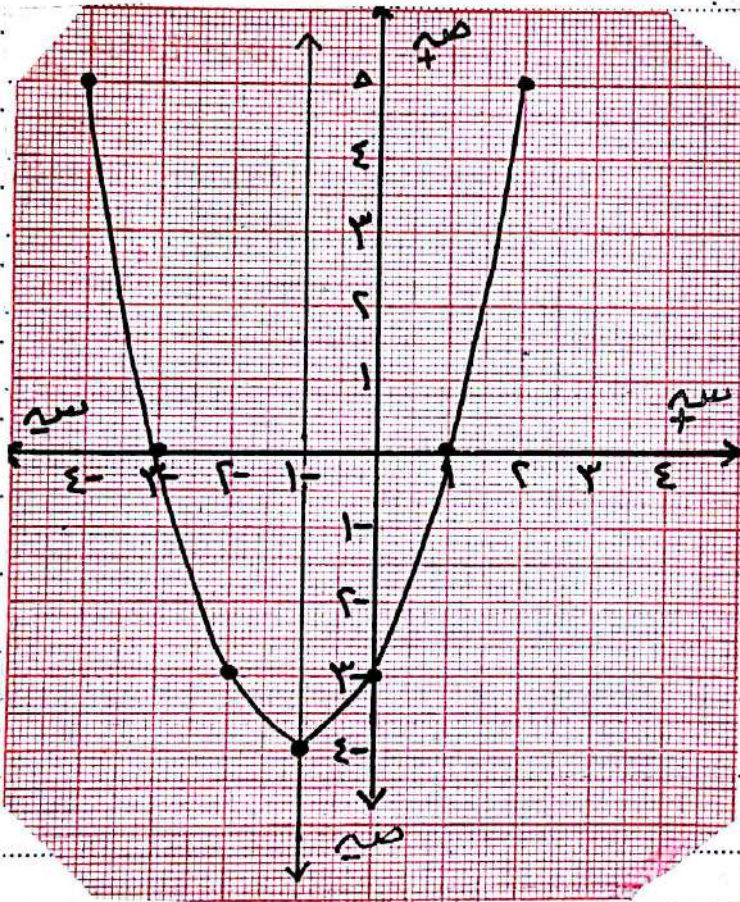


الدالة التربيعية

١) ارسم منحنى الدالة: حيث د (س) = س^٢ + ٢س - ٣ حيث س ∈ [-٤، ٢] ومن الرسم اوجد: رأس المنحنى ومعادلة خط التماسل والقيمت العظمى أو الصغرى للدالة

الحل

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	٥	٠	٣	-٤	-٣	٠	٥



رأس المنحنى (-١، -٤)

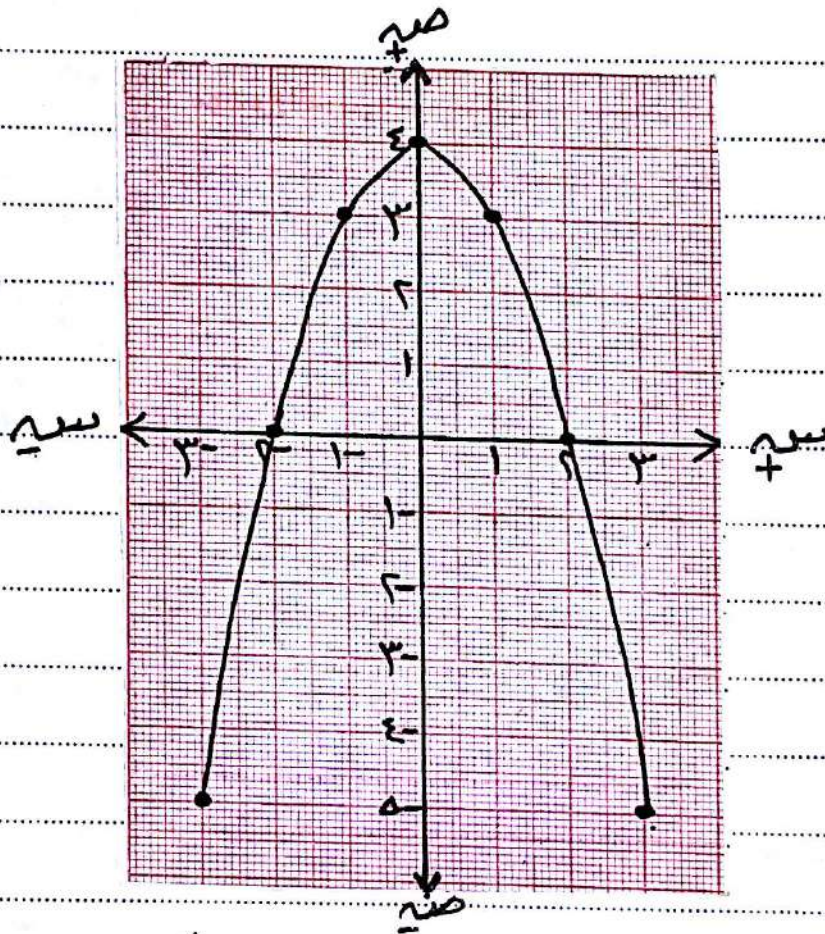
القيمة الصغرى = -٤

معادلة خط التماسل س = -١

٢ ارسم منحنى الدالة: د (س) = $x - s$ - سأ متخذاً
 س $\in [-3, 3]$ ومن الرسم أوجد: رأس المنحنى
 ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
د(س)	-5	0	3	4	3	0	-5



رأس المنحنى = $(0, 4)$

معادلة محور التماثل د = 0

القيمة العظمى = 4

ملاحظات هامة

① المنحنى \cup إذا كان معامل $+ س$ موجب

المنحنى \cap إذا كان معامل $- س$ سالب

② إذا كان $+ س$ توجد قيمة صفري

ويكون المنحنى مفتوح لأعلى \cup

أما إذا كان $- س$ توجد قيمة عظمى

ويكون المنحنى مفتوح لأسفل \cap

صورة الدالة التربيعية: $د(س) = أس^2 + ب س + ج$ ، $أ \neq 0$
 القطعة العظمى (الصغرى) = الحدائق الصادرة لرأس المنحنى

④ معادلة محور التماثل: $س =$ الحدائق السيني لرأس المنحنى

وهو مستقيم // محور الصادران ماراً برأس المنحنى

يمكن إيجاد $س$ كما يلي $س = \frac{-ب}{٢أ}$

⑤ رأس المنحنى = $(\frac{-ب}{٢أ} , د(\frac{-ب}{٢أ}))$

⑥ إذا كان المنحنى \cup غير مكتمل فليس له محور تماثل

الألة الحاسبة

كيفية تكوين جدول الدالة التربيعية :
د (س) = س - ٤ في [-٣، ٣]

الخطوات :

- ١ Mode 3 \rightarrow يظهر $f(x) =$
- ٢ ALPHA $\times x^2 - 4$ \rightarrow يظهر $f(x) = x^2 - 4$
- ٣ = Start يظهر
- ٤ 3 = End يظهر 3 = نكتب
- ٥ الجدول يظهر \Rightarrow Step يظهر

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

كيفية تكوين جدول الدالة الخطية

د (س) = ٢س - ٣

نقرض بثلاثة أرقام ٠ ١ ٢

الخطوات : نفس الخطوات السابقة

س	٠	١	٢
د(س)	-٣	-١	١

على الطالب حفظ وتطبيق هذا الخطوات

٢٠

مسئلة محلولة

١) رأس منحنى د (س) = س - ٥ س + ٦ هو

الحل

$$س = \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{١ \times ٢} = \frac{٥}{٢}$$

لغرض ب $\frac{٥}{٢}$ في د (س) = س - ٥ س + ٦

$$د\left(\frac{٥}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢}\right) - ٥\left(\frac{٥}{٢}\right) + ٦ = \frac{١}{٢}$$

رأس المنحنى = $\left(\frac{٥}{٢}, \frac{١}{٢}\right)$ ٢) اذا كان د (س) = س - ٤ فيان د $(\sqrt{١}) = \dots$

$$\text{الحل} \quad د(\sqrt{١}) = (\sqrt{١}) - ٤ = ٣$$

٣) معادلة محور القاطل لمنحنى د (س) = س - ٩

الحل هي

$$س = \frac{٥}{٢} = \frac{\text{صفء}}{١ \times ٢} = \frac{\text{صفء}}{٢}$$

٤) رأس المنحنى للدالة د (س) = س - ٤ س هي ...

$$\text{الحل} \quad س = \frac{٤}{٢} = \frac{٤}{١ \times ٢} = ٢$$

لغرض عن س = ٢ في د (س) = س - ٤ س

رأس المنحنى = $(٢, ٠)$

(٢١)

تبارين على الدالة الثابتة والخطية والتربيعية

- ١ إذا كان د (س) = ٧ فإن د (١-٧) = د (٧-١) =
- ٢ إذا كان د (س) = س - ٤ فإن د (٤) = د (٧) =
- ٣ إذا كان د (س) = ٢س + ٤، د (١-١) = ١ فإن ٢ =
- ٤ إذا كان د (س) = ٢س + ٤ فإن د (٠) + د (١) =
- ٥ إذا كان د (٢، ٢) = ٢ بيان د (س) = س - ٢ فإن ص =
- ٦ إذا كان د (س) = ٥س - ١، د (٢) = ٤ فإن ٢ =
- ٧ إذا كان د (س) = ٢س - ٥س + ٢ فاستنتج أن:

$$د (٢) = د \left(\frac{١}{٢} \right)$$

مثل بياناً كل من الدوال التربيعية في الفترة المعطاة ومن
الرسم أو جدول رأس المخني والقيمة الصغرى أو العظمى
ومعادلة محور التماثل:

- | | | | |
|----|--------------------|---|------------|
| ٨ | د (س) = س - ١ | ٦ | س = [٢، ٢] |
| ٩ | د (س) = س - ٤ | ٦ | س = [٣، ٣] |
| ١٠ | د (س) = س - ٢س | ٦ | س = [٤، ٢] |
| ١١ | د (س) = س + ٣ | ٦ | س = [٣، ٣] |
| ١٢ | د (س) = س + س - ٦ | ٦ | س = [٣، ٤] |
| ١٣ | د (س) = س - ٤س + ٣ | ٦ | س = [٤، ٠] |
| ١٤ | د (س) = ٦س - س - ٩ | ٦ | س = [٥، ٠] |
| ١٥ | د (س) = س - ٥س + ٣ | ٦ | س = [٥، ٠] |
| ١٦ | د (س) = ٤ + ٢س - س | ٦ | س = [٤، ٢] |
| ١٧ | د (س) = ٥س - س | ٦ | س = [٦، ١] |
| ١٨ | د (س) = س + ١ | ٦ | س = [٣، ٣] |
| ١٩ | د (س) = (س - ٢) | ٦ | س = [٥، ١] |

النسبة

النسبة: هي علاقة بين عددين $P : Q$ ، $\frac{P}{Q}$ حيث P هي حدى النسبة ، Q مقدار النسبة ، Q تسمى النسبة

١) إذا كان $\frac{P_2 + P_3}{Q - P_5} = \frac{3}{4}$ أوجد $P : Q$

الحل

$$P_3 - P_{15} = Q_8 + P_{12}$$

$$P_3 - Q_8 = P_{15} - P_{12}$$

$$Q_{11} = P_3$$

$$3 : 11 = \frac{11}{3} = \frac{P}{Q}$$

٢) أوجد العدد الحقيقي الذي إذا أضيف إلى حدى النسبة

$$2 : 5 \text{ أصبحت } 3 : 2$$

الحل نقض العددين

$$\frac{2}{3} = \frac{2 + \text{حاصل}}{5 + \text{حاصل}}$$

$$3 \times 2 = 6 + 3 \times \text{حاصل}$$

$$6 = 3 \times \text{حاصل}$$

$$2 = \text{العدد}$$

٣) إذا كان $٤س - ٢اس ص + ٩ص = ٠$

فأوجد $س : ص$

الحل $(٢س - ٣ص)(٢س - ٣ص) = ٠$

$$\therefore ٢س - ٣ص = ٠$$

$$٢س = ٣ص$$

$$\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢} = ٣ : ٢$$

٤) ما العدد الموجب الذي إذا طرح من مقدم النسبة $١٥:١٣$

وأضيف مبعده إلى تاليها فإن النسبة تصبح $٥:١$

الحل نفرض العدد $س$

$$\frac{١٣ - س}{١٥ + س} = \frac{١}{٥} \quad \text{ضرب طرفيه = ضرب وسطيه}$$

$$١٥ + س = ٦٥ - ٥س$$

$$١٠س = ٥٠ - ٥$$

$$١٠س = (٥ - س)$$

$$١٠س = ٥ - س$$

$$١١س = ٥ \quad \text{العدد} = ٥$$

٥) مثال شبيه: إذا كان $٢٢ = ٣ = ٤ = ح$

أوجد $٢ : ٣ : ح$

$$\text{الحل: } \frac{٢}{١٢} = \frac{٣}{١٢} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣} \quad \therefore \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{١٢}$$

$$\therefore ٢ : ٣ : ح = ٣ : ٤ : ٦$$

تمارين

$$١) \text{ اذا كان } \frac{ص+٣}{٥} = \frac{٣}{٥} \text{ فـ } \frac{ص}{ص+٣} = \frac{٣}{٥}$$

$$٢) \text{ اذا كان } \frac{ص}{ص+٣} = \frac{٢}{٣} \text{ فـ } \frac{ص}{ص+٣} = \frac{٢}{٣}$$

$$٣) \text{ اذا كان } ٩س - ١٦ص = ٠ \text{ حيث } س، ص \in \mathbb{Z}^+ \text{ فان } \frac{س}{ص} = \frac{١٦}{٩}$$

$$٤) \text{ اوجد العدد الذي اذا اضيف الى حدى النسبة } \frac{٥}{٧} \text{ لا يصبح } \frac{٧}{٨}$$

$$٥) \text{ اوجد العدد الذي اذا اضيف الى كل من } ١، ٤، ٦، ٧ \text{ حصلنا على اعداد متساوية}$$

$$٦) \text{ اذا كان } \frac{٩}{٥} = \frac{٧}{٧} = \frac{٥٢-٩٤}{س} \text{ فـ } \frac{س}{س} = \frac{٧}{٧}$$

$$٧) \text{ اذا كان } \frac{٩}{٥} = \frac{٣}{٤} = \frac{٧}{٥} \text{ فـ } \frac{٩}{٥} = \frac{٣}{٤}$$

تمرين ١٢: اوجد العدد الذي اذا اضيف الى كل من الاعداد ٣، ٥، ٦، ٨، ١٢ فياخذ تكون متناسبة
الحل : نقرب العدد س

$$\frac{س+٨}{س+١٢} = \frac{س+٣}{س+٥}$$

$$س+٨ = ٣٦ + ٥س \quad س+٣ = ٤٠ + ١٢س$$

$$٤٠ + ٣٦ = ٥س - ١٢س$$

$$٧٦ = ٧س \quad \text{العدد} = ١٠٨$$

تساوی نسبتیه او اکثر

إذا كان p, q, r كميات متناسبة فإن $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$ ج

حيث p : الأول المتناسب
 q : الثاني المتناسب
 r : الثالث المتناسب
 s : الرابع المتناسب

خاصیت ہامہ:

اذا كان $\frac{v}{c} = \frac{p}{h}$ فان $h = p \cdot \lambda$ ، $h = \frac{h}{\lambda}$

حيث \neq ثابت التناسب \neq صفر

اكل: ① اذا كان ٣، ٤، ٥، ١٢ كميات متناسبة فإن

مس = ... الحل
مس = 9

② الرابع المتناسب للكميات ١٢٦٥ / ١٠٦ هو - - -

الحل: $\frac{10}{س} = \frac{5}{12}$ $\therefore س = 24$

٣) إذا كان $\frac{P}{U} = \frac{3}{6}$ فإن $\frac{U+P}{U-P} =$ الحل

$$D = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{4}}{\sqrt{1} - \sqrt{4}} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

④ إذا كان p, q, r كميات متناسبة فإن $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

الحل $\frac{1}{3} = \frac{2}{9} = \frac{4}{18} \therefore \frac{6}{9} = \frac{4}{3}$

(٢٦)

٥) الرابع المتناسب للكليات P, M, U هو ...

الحل $\frac{U}{P} = \frac{P}{M} \therefore U = \frac{P^2}{M}$

٦) إذا كان $\frac{P}{U} = \frac{2}{3}$ أوجد قيمة $\frac{U_2 - P_5}{U + P_3}$

الحل $P = U_2, U = P_3$

$$\frac{4}{9} = \frac{P_4}{P_9} = \frac{P_3 \times 2 - P_2 \times 5}{P_3 + P_2 \times 3}$$

٧) إذا كان $\frac{U}{P} = \frac{P}{M}$ فإيا $(5 + U_2 - P_3)$ $\frac{U}{P} = \frac{P}{M}$

الحل $5 = 5 + P_3 \times 2 - P_2 \times 3$

٨) إذا كان P, U, M هي كليات متناسبة اثبت انه:

الحل $\frac{U+P}{U} = \frac{P+U}{P}$

نقضي: $\frac{P}{U} = \frac{U}{P} \therefore P = U$

الطرف الأيمن $1 + \frac{P}{U} = \frac{(1+P)U}{U} = \frac{U+P}{U}$

الطرف الأيسر $1 + \frac{P}{U} = \frac{(1+P)U}{U} = \frac{U+P}{U}$

\therefore الطرفان متساويان

٩ إذا كان $\frac{p}{u} = \frac{h}{s}$ فاثبت أن $\frac{u-p}{u+p} = \frac{s-h}{s+h}$

الحل
 $u = p, \quad s = h$

الأيض $\frac{1-p}{1+p} = \frac{(1-p)u}{(1+p)u} = \frac{u-p}{u+p} = \frac{u-p}{u+p}$

الأيض $\frac{1-p}{1+p} = \frac{(1-p)s}{(1+p)s} = \frac{s-p}{s+p} = \frac{s-h}{s+h}$

∴ الطرفان متساويان

١٠ إذا كان $\frac{s}{ص} = \frac{ع}{ل} = \frac{م}{ن}$ فاثبت أن :

إحدى النسب = $\frac{٢س - ٣ع}{٢ص - ٣ل}$

الحل
 $\frac{s}{ص} = \frac{ع}{ل} = \frac{م}{ن} = ك$

$س = ص ك, \quad ع = ل ك, \quad م = ن ك$

الأيض $\frac{٢س - ٣ع}{٢ص - ٣ل} = \frac{٢(ص ك) - ٣(ل ك)}{٢ص - ٣ل} = \frac{ك(٢ص - ٣ل)}{٢ص - ٣ل} = ك$

$ك = \frac{٢س - ٣ع}{٢ص - ٣ل} = ك = \text{إحدى النسب}$

امثلة تنوعة على التنازح

① اذا كان $\frac{ص+ع}{٩} = \frac{س+ص}{١٣}$ اثبت ان:

$\frac{س+ص+ع}{١١} = \frac{س-ع}{٢}$

الحل

① ليجمع مقدمات وتوالى النسبتين $\frac{س+ص+ع}{٢٢} = \frac{س-ع}{٢}$ احدي النسبتين

② بطرح النسبتين $\frac{س+ص-ص-ع}{٩-١٣} = \frac{س-ع}{٤}$ احدي النسبتين

∴ $\frac{س+ص+ع}{٢٢} = \frac{س-ع}{٤}$ بالضرب $\times ٢$

∴ $\frac{س+ص+ع}{١١} = \frac{س-ع}{٢}$

② اذا كان $\frac{ع}{س+ص+ع} = \frac{ص}{س+ص+ع} = \frac{س}{س+ص+ع}$

اثبت ان $\frac{ع}{س+ص+ع} = \frac{ص}{س+ص+ع} = \frac{س}{س+ص+ع}$

الحل

①+② ليجمع $\frac{س+ص}{٢٢} = \frac{س+ص}{٢٢}$

③+④ ليجمع $\frac{ع+ص}{٢٢} = \frac{ع+ص}{٢٢}$

③+① ليجمع $\frac{ع+س}{٢٢} = \frac{ع+س}{٢٢}$

∴ $\frac{ع+س}{٢٢} = \frac{ع+ص}{٢٢} = \frac{س+ص}{٢٢}$

٢٩

٣) اذا كان $\frac{ع + س}{٨} = \frac{ع + ص}{٥} = \frac{س + ص}{٧}$

الاشتاتان $\frac{س + ص + ع}{س - ع} = ٥$

الحل ملاحظة $\frac{س - ع}{١} = \frac{س + ص + ع}{٥}$

بجمع ١ + ٥ + ٥ $\frac{س + ص + ع}{١٠} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٢٠}$ اهد النسبة

بطرح ٥ - ٥ $\frac{س - ع}{٢} = \frac{س + ص - ص - ع}{٥ - ٧}$ اهد النسبة

$\therefore \frac{س + ص + ع}{س - ع} = ٥$ $\therefore \frac{س - ع}{٢} = \frac{س + ص + ع}{١٠}$

٤) اذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ب}{٢س - ص} = \frac{٢}{٢س - ص}$ الاشتاتان

الحل ملاحظة $\frac{ب + ٢}{ص} = \frac{٢ + ٢}{س}$

بضرب ١ + ٢ $\frac{ب + ٢}{٣س} = \frac{٢ + ٢}{٤س - ٢ص + ص - س}$ اهد النسبة

بجمع ١ + ٢ $\frac{ب + ٢}{٣ص} = \frac{٢ + ٢}{٢س - ص + ٤ص - ٢س}$ اهد النسبة

$\therefore \frac{ب + ٢}{٣ص} = \frac{٢ + ٢}{٣س}$

٥) اذا كان $\frac{ب}{٤س + ٥ص} = \frac{ب}{٣ص - س} = \frac{٢}{٢س + ص}$ **طريقين**

الاشتاتان $\frac{٧}{١٧} = \frac{ب + ٢}{٤ب + ح}$

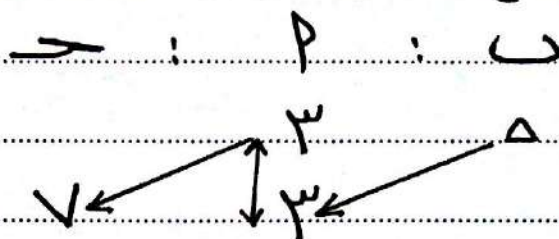
۲۰

۶) اذا كان $\frac{p}{u} = \frac{3}{5}$ ، $\frac{3}{v} = \frac{p}{u}$ فان $\frac{u}{v} = \frac{5}{3}$

الـ

$$\frac{21}{15} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{7}{5}$$



$$21 : 9 : 15$$

۷) اذا كان $\frac{p}{u} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{u}{v} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{p}{v} = \frac{3}{4}$ فاوجد $\frac{u}{v}$

$$= \frac{p}{u} + \frac{u}{v} - \frac{p}{v} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{4}{3}$$

$$v = \frac{21}{3} = 7$$

۸) اذا كان $\frac{u}{v} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{v}{w} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{u}{w} = \frac{3}{4}$ اثبت ان:

$$\frac{1}{6} = \frac{u - v + w}{u + v + w}$$

۹) اذا كان $\frac{u}{v} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{v}{w} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{u}{w} = \frac{3}{4}$ اثبت ان:

$$١ \text{ اذا كان } \frac{p}{u} = \frac{3}{7} \text{ فـ } \frac{u+p}{u-p} =$$

$$٢ \text{ اذا كان } p=5 \text{ فـ } \frac{u}{p} =$$

٣ الاول متناسب للكميات ٣٥، ١٥، ٢١ هو

$$٤ \text{ اذا كان } \frac{p+2}{u-p} = \frac{2}{3} \text{ فـ } \frac{u}{p} =$$

$$٥ \text{ اذا كان } \frac{u+p}{p} = \frac{---}{2p} \text{ فـ } \frac{p-2}{p} = \frac{u}{v} = \frac{p}{5} \text{ فـ } \frac{p-2}{p} = \frac{u}{v} = \frac{p}{5} \text{ فـ } \frac{p-2}{p} = \frac{u}{v} = \frac{p}{5}$$

$$٧ \text{ اذا كان } s:v=3:1 \text{ و } k:s+v=28 \text{ فـ } s=6 \text{ و } v=$$

$$٨ \text{ اذا كان } \frac{s}{v} = \frac{v}{5} = \frac{e}{4} = \frac{---}{11} = \frac{e+v-s}{3} = \frac{e+v-s}{3}$$

$$٩ \text{ اذا كان } \frac{s}{3} = \frac{v}{4} \text{ فـ } (e+s-3v+7) =$$

$$١٠ \text{ اذا كان } 3، 1، 1، 5 \text{ متناسبة فـ } e=$$

$$١١ \text{ اذا كان } \frac{p}{s} = \frac{u}{s+p} = \frac{3}{5} \text{ فـ } \frac{u+p}{s+p} =$$

١٢ الرابع متناسب للأعداد ٨، ٥، ٢ هو

$$١٣ \text{ الرابع متناسب للكميات } p-2، ٢، p-u \text{ هو}$$

۳۲

اذا كان P, U, H وكميات متناسبة فاثبت ان:

$$\frac{H^2 - U^2}{H^2 + U^2} = \frac{H^2 - P^2}{H^2 + P^2} \quad (16) \quad \left(\frac{H - P}{H + U} \right) = \frac{H - P}{H + U} \quad (12)$$

$$\frac{H^2 + P^2}{H^2 + U^2} = \frac{H^2 + P^2}{H^2 + U^2} \quad (17) \quad \frac{H^2 + U^2}{H^2 + P^2} = \frac{H^2 + P^2}{H^2 + U^2} \quad (15)$$

اذا كان $\frac{H}{U} = \frac{H}{U} = \frac{P}{U}$ فاثبت ان:

$$\frac{H^2 - U^2}{H^2 - U^2} = \frac{H^2 - P^2}{H^2 - P^2} \quad (18)$$

$$\frac{HP}{U} = \frac{H^2 - U^2 + P^2}{H^2 - U^2 + P^2} \quad (19)$$

$$\frac{H}{U} = \frac{H^2 - P^2}{H^2 - U^2} \quad (19)$$

$$\frac{H}{U} = \frac{U}{H} = \frac{P}{U} \quad (20)$$

فاثبت ان كل نسبة = $\frac{H^2 - U^2 + P^2}{H^2 - U^2 + P^2}$

$$\frac{U + P - H}{H} = \frac{H + U - P}{U} = \frac{H + U - P}{H} \quad (21)$$

$$\frac{H}{U} = \frac{U}{H} = \frac{P}{U} \quad (22)$$

التناسب المتسلسل

يقال للكميّات a, b, c في تناسب متسلسل

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ومنها $a = b^2/c$

بشرط a, b, c $\sqrt{ac} = b$

لهما نفس الإشارة

ب الوسيط المتناسب

يقال للكميّات a, b, c, d في تناسب متسلسل

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$

$a = b^2/c, b = c^2/d, c = d^2/e$

إذا كان b وسط متناسب بين a, c

فإن $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

$a = b^2/c, b = c^2/d$

① الوسيط المتناسب للعددين ٨ و ٢ هو

الحل $\sqrt{8 \times 2} = 4$

٣٤

٢ الثالث المتناسب للعددين ١٠، ٥ هو
الحل $\frac{١٠}{١} = \frac{٥}{١}$ \therefore س = ٢٠

٣ إذا كان ٢، ٤، ٦، ٨ ب في تناسب متسلسل فإن

$$\frac{٤}{٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٨}{٦} = \frac{١٠}{٨} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{١٤}{١٢} = \frac{١٦}{١٤} = \frac{١٨}{١٦} = \frac{٢٠}{١٨}$$

الحل

$$٨ = ١٠ \quad ١ = ٢ \therefore$$

$$٩ = ١٠ + ٢ \therefore$$

٤ إذا كان ١٠ و ٢٠ متناسبين ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠

$$\frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٨}{٦} = \frac{١٠}{٨} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{١٤}{١٢} = \frac{١٦}{١٤} = \frac{١٨}{١٦} = \frac{٢٠}{١٨}$$

الحل

$$\frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٨}{٦} = \frac{١٠}{٨} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{١٤}{١٢} = \frac{١٦}{١٤} = \frac{١٨}{١٦} = \frac{٢٠}{١٨}$$

$$\frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٨}{٦} = \frac{١٠}{٨} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{١٤}{١٢} = \frac{١٦}{١٤} = \frac{١٨}{١٦} = \frac{٢٠}{١٨}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٦} = \frac{٦}{٨} = \frac{٨}{١٠} = \frac{١٠}{١٢} = \frac{١٢}{١٤} = \frac{١٤}{١٦} = \frac{١٦}{١٨} = \frac{١٨}{٢٠}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٦} = \frac{٦}{٨} = \frac{٨}{١٠} = \frac{١٠}{١٢} = \frac{١٢}{١٤} = \frac{١٤}{١٦} = \frac{١٦}{١٨} = \frac{١٨}{٢٠}$$

الطرفان متساويان

٥ الثالث المتناسب للعددين ١٢، ٩، ٦، ٣، ٢، ١ هو ١٠٠

٢٥

٦ إذا كان $\frac{u}{v} = \frac{p}{q}$ فاثبت أن $\frac{p}{q} = \frac{p-s}{q-s}$

الحل
 $\frac{p}{q} = \frac{p-s}{q-s}$ ، $u = p$ ، $v = q$ ، $s = p$

الايض $\frac{p}{q} = \frac{p-s}{q-s} = \frac{p-s}{p-s} = 1$

الايض $\frac{p}{q} = \frac{p-s}{q-s}$ الطرفان متساويان

٧ إذا كان $\frac{u}{v} = \frac{p}{q}$ فاثبت أن: $\frac{p+s}{q+s} = \frac{u+p}{v+u}$

الحل
 $\frac{p}{q} = \frac{p+s}{q+s}$ ، $u = p$ ، $v = q$ ، $s = p$

الايض $\frac{p}{q} = \frac{p+s}{q+s} = \frac{p+s}{p+s} = 1$

الايض $\frac{p}{q} = \frac{p+s}{q+s} = \frac{p+s}{p+s}$

الطرفان متساويان

٨ إذا كان p, q, r, s أعداداً صحيحة

مطلوب إثبات أن $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

تمارين على التناسب المتسلسل

الم ١: الوسط المتناسب للعددين ٢٧، ٣٦ هو

٢: الثالث المتناسب للعددين ١٢، ٩ هو

٣: إذا كان $P, ٩, ٣, B$ في تناسب متسلسل فإن $P + B =$

٤: إذا كان $P, ٣, S, ٤, M$ كميان متناسبة فإن $S =$

٥: الوسط المتناسب بين ٢٧، ٣٦ هو

٦: إذا كان $S + ١, ٥, S + ٣$ متناسبة فإن $S =$

٧: الوسط المتناسب الطويل للعددين $١٦, \frac{٤}{٩}$ هو

إذا كان B وسط متناسب بين $P, ٦$ - فاشبه أن:

$$\frac{P}{B} = \frac{B + P}{B + 6} \quad ٩ \quad \frac{B}{P} = \frac{B^3 - 6^3}{P^3 - 6^3} \quad ١٠$$

$$\frac{P}{B} = \frac{B}{6} + \frac{P}{6} \quad ١١ \quad \frac{P}{B} = \frac{B^3 + 6^3}{B^3 + 6^3} \quad ١٢$$

١٤: إذا كان ١٦، ٤، ٣، ٢ في تناسب متسلسل فأوجد ل، م

١٣: أوجد العدد الذي يضاف إلى ٣، ٧، ١٣ لتكون في تناسب متسلسل

التغير الطردى

يقال أنه ص تتغير طردياً مع س وتكتب $\text{ص} \propto \text{س}$

إذا كان $\text{ص} = \text{س}$ س ثابت \neq صفر

$$\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2} \quad \text{س}_1 \text{ ص}_1 = \text{س}_2 \text{ ص}_2$$

١ إذا كان $\text{ص} \propto \text{س}$ وكانت $\text{ص} = ٢٠$ عندما $\text{س} = ٧$
أوجد العلاقة بين ص و س ثم قسمة ص عند $\text{س} = ١٤$

الحل

$$\text{ص} \propto \text{س} \quad \text{ص} = \text{س} \quad \text{س} = \frac{\text{ص}}{٢٠} = \frac{٢٠}{٧}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٢٠}{٧} \text{س}$$

$$\therefore \text{ص} = ١٤ \times \frac{٢٠}{٧} = ٤٠$$

٢ إذا كان $\text{م} = ٩ + ٦\text{ن}$ فاشتت ان $\text{م} \propto \text{ن}$

الحل $\text{م} = ٩ + ٦\text{ن}$

$$٠ = (٣ - ٢)(٣ - ٢)$$

$$\text{م} = ٣ \quad \therefore \text{ن} = ٢$$

٣١

٢) اذا كان ص م اس و كان ص = ا عند س = ع
اوجد ص عند ص = ٢

الحل ص م اس ص = م = م اس م = م = م
ص = م = م

ومن هنا اس = ٢ ص

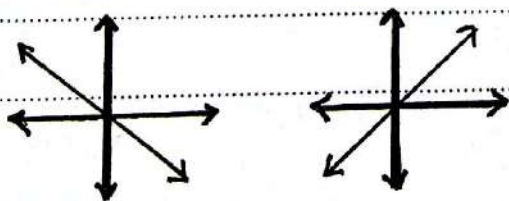
اس = ٢ × ٢ = ٤ ∴ ص = ١٦

٤) اذا تغير مكعب س تبعاً لتغير مربع ص وكان س = ٢
عندما ص = ا فأوجد العلاقة بين س و ص
قيمة ص عندما س = ع

الحل
س م ص س = م ص م = م ص
∴ س = ٨ ص

ومن هنا ص = م = م = ٨ × ٦٤ = ٨

∴ ص = ٨ = ٢١٢ ±



التمثيل البياني للتغير الطردي
مستقيم ما ر نقطة الأصل

١) اذا كان ص م س و كان ص = ع عندما س = ١٢ فاوجد ص عندما س = ٣

٢) اذا كان ص م س و كان ص = ١٤ عندما س = ٢٢ فاوجد ص عندما س = ٦٠

٣) اذا كان ص م س و كان ص = ٢٧ عندما س = ٣ فاوجد العلاقة بين س، ص و قيمته س عندما ص = ٧٥

٤) اذا كان ص م س و كانت ص = ٦ عندما س = ٢ فاوجد ص عندما س = ٥

٥) اذا كان ع م + ٩ = ١٢ فان ثبت ان م تتغير طردياً مع ب

٦) اذا كان ص م س و كانت ص = ٦٤ عندما س = ٢ فاوجد العلاقة بين س، ص و قيمته ص عندما س = ١

٧) اذا كان $\frac{٩س - ٢ص}{٣س - ٢ع} = \frac{ص}{ع}$ فان ثبت ان ص م ع

٨) اذا كانت المسافة التي تقطعها دراجة بخارية (ف) تتغير طردياً بتغير مربع الزمن (هـ) وكان ف = $\frac{٨١}{١٦}$ كم

عندما هـ = $\frac{١}{٤}$ ساعة فاوجد قيمة هـ عندما ف = $\frac{٤٤}{١٦}$ كم

٩) اذا كان ص م المعلوم الضربى للمقدار $\frac{١}{س}$ فاوجد العلاقة بين س، ص اذا كان ص = ع عندما س = ٣

١٠) اذا كان $\frac{١}{س} = \frac{٢}{ص} = \frac{٣}{ع}$ وكان م س + ٢ ب س ص + ح ص = ٠

١١) فان ثبت ان ص م ص فاوجد العلاقة بين س، ص عندما س = ٣ اذا كان ص م (س + ١) فاوجد العلاقة بين س، ص عندما ص = ٢

التغير العكسي

يقال انه ص تتغير عكسياً بتغير س وتكتب (ص لا س)

اذا كانه $ص = \frac{1}{س} \leftrightarrow م = س = ص$

$\frac{س١}{س٢} = \frac{ص٢}{ص١} \leftrightarrow س١ ص١ = س٢ ص٢$

تمارين

- ١ اذا كان ص لا س وكان ص = ٥ عندما س = ٢ فاوجد العلاقة بين ص، س وقيمة ص عندما س = ١٥
- ٢ اذا كان ص لا س وكان ص = ٣ عندما س = ٢٠ فاوجد العلاقة بين ص، س وقيمة س عندما س = ٦٠
- ٣ اذا كان ص لا س وكان ص = ٣ عندما س = ٢ فاوجد قيمة ص عندما س = ٥
- ٤ اذا كان ص لا س وكان ص = ٣ عندما س = ١٦ فاوجد قيمة ص عندما س = $\frac{٤}{٩}$
- ٥ اذا كان ص تتغير عكسياً بتغير س وكان ص = ٥ عندما س = ١٥ فاوجد قيمة س عندما ص = ١٠

٦ من الجدول التالي :

بين نوع التغير بين ص، س

اوجد ثابت تناسب

اوجد قيمة ص عندما س = ٣

اوجد قيمة س عندما ص = $\frac{١٢}{٥}$

٦	٤	٢	س
٢	٣	٦	ص

مراجعة عامة

اكمل

- ١ اذا كان (س - ١٣، ١) = (٨، ص - ٣) فإن |س + ص| = ...
- ٢ اذا كان د (س) = ٤، د (س + ٣) = ١٢ فياين د (ص) = ...
- ٣ النقطة (٤، ٣) تقع في الربع ...
- ٤ النقطة (٠، ٤) تقع على محور ...
- ٥ اذا كانت (٢ - ٤، ٣ - ٢) تقع على محور الصادات فان P = ...
- ٦ الدالة د حيث د (س) = ٥ س + ٤ من الدرجة ...
- ٧ اذا كان د (س) = س - ٣ فياين د (-٢) = ...
- ٨ الوسط المناسب بين العددين ٨، ٢ هو ...
- ٩ اذا كان $\frac{ص}{٥} = \frac{٧}{٧}$ فياين المقدار ٧ - ٥ + ٤ = ...
- ١٠ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من القيم يسمى ...
- ١١ اذا كان ص لا س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فياين ص = ... عندما س = ١
- ١٢ الثالث المناسب للعددين ٤٩ - ١٥ هو ...
- ١٣ المدى للقيم ٦، ٧، ٩، ٣، ٥، ١٣ هو ...
- ١٤ الرابع المناسب للكسرات ٣، ١٢، ٩ هو ...
- ١٥ اذا كان $\frac{٩}{٣} = \frac{٣}{٢}$ فياين $\frac{٥+٢}{٥-٢} = ...$
- ١٦ اذا كان منحنى د (س) = ٢ س + ٥ يمر بالنقطة (٩، ٢) فياين د = ...
- ١٧ اذا كان ص = ٣ س فياين ص لا ...
- ١٨ اذا كان $\frac{٩}{٣} = \frac{٥}{٥} = \frac{٥+٢}{٥}$ فياين س = ...
- ١٩ ص = ٢ س + ٣ يمثل مستقيم يقطع محور الصادات في (٦، ...) ...
- ٢٠ اذا كان ص لا س وكان ص = ٣ عندما س = ٥ فياين ثابت التناسب = ...
- ٢١ {٢} x {٣} = ...
- ٢٢ اذا كان ع علاقة من س الى ص فان ع ...
- ٢٣ اذا كان س = {٢} فياين س = ...

جمع البيانات

■ مصادر جمع البيانات : أولية - ثانوية

■ أساليب جمع البيانات : العينات - الحصر الشامل

■ اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائي تسمى

عينة عشوائية

مقاييس التشتت

١) المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

مثال : المدى للقيم ٢٧، ١٥، ١٩، ٣٢، ١٥، ١٠٠

الحل : المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

$$= 32 - 10 = 22$$

مثال : أي المجموعات أكثر تشتتاً :

أ = ٥٠، ٥٨، ٦٠، ٦٢، ٦٥ : المدى = ١٥

ب = ٤٥، ٧٣، ٨٥، ٩٢، ٩٥ : المدى = ٥٠

∴ ب أكثر تشتتاً من أ

الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من المفردات يسمى ...

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

نس: الوسط الحسابي ، ه: عدد القيم

١) اوجد الانحراف المعياري للقيم: ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

خطوات الحل: ● الوسط الحسابي ● الانحراف المعياري

$$\bar{x} = \frac{35}{5} = 7, \quad h = 5$$

س	س - نس	(س - نس) ^٢
٥	٥ - ٧ = -٢	٤
٦	٦ - ٧ = -١	١
٧	٧ - ٧ = ٠	٠
٨	٨ - ٧ = ١	١
٩	٩ - ٧ = ٢	٤
١٠		

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{10}{5}} =$$

$$\sqrt{2} =$$

٢) احسب الانحراف المعياري

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

تكون الجدول للوسط الحسابي

س	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
ل	١	٢	٣	٣	١	١٠
س × ل	٥	١٦	٢٧	٣٠	١٢	٩٠

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{٩٠}{١٠} = ٩$$

تكون جدول الانحراف المعياري

س	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
س - س	-٤	-١	٠	١	٣	
(س - س) ^٢	١٦	١	٠	١	٩	
(س - س) × ل	١٦	٢	٠	٣	٩	٣٠

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - س)^2}{ن}} = \sqrt{\frac{٣٠}{١٠}}$$

$$= \sqrt{\frac{٣٠}{١٠}} = \sqrt{٣}$$

٣١ حسب الانحراف المعياري

المجموعات	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	-٠	المجموع
التكرار	٤٠	٧	١٥	١١	٥	٢

الحل

المجموعات	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	-٠	المجموع
التكرار	٤٠	٧	١٥	١١	٥	٢
مركز المجموعة	٤٥	٣٥	٢٥	١٥	٥	
س × ك	١٢٠٠	٣١٥	٥٢٥	٢٧٥	٧٥	١٠

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{١٢٠٠}{٤٠} = ٣٠$$

فلنكون جدول الانحراف المعياري

س	٤٥	٣٥	٢٥	١٥	٥	
س - س	١٥	٥	٥ -	١٥ -	٢٥ -	
(س - س)²	٢٢٥	٢٥	٢٥	٢٢٥	٦٢٥	
(س - س) × ك	٤٦٠٠	١٥٧٥	٣٧٥	٢٧٥	١١٢٥	١٢٥٠

$$\frac{\sum (س - س)² \times ك}{\sum ك} = \sigma^2$$

$$١٠,٧٢٣ = \sqrt{\frac{٤٦٠٠}{٤٠}} =$$

تمارين

- ١) المدى هو
- ٢) المدى للقيمتين ١٣، ٩، ٤، ٤، ٧ هو
- ٣) الوسط الحسابي للقيمتين ٩، ٨، ٧، ٦، ٥ هو
- ٤) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات الانحرافات القيعية عن وسطها الحسابي يسمى
- ٥) إذا كان σ الوسط الحسابي لمجموعة من القيم عددها ٩ وكان $\sum (x - \bar{x})^2 = ١٤٤$ فإن الانحراف المعياري $\sigma =$
- ٦) مصادرجمع المعلومات هي
- ٧) الدرجة الأكثر تكراراً لمجموعة من البيانات تسمى

أوجد الانحراف المعياري:

- ٨) للقيمتين ١٢، ١٤، ١٦، ١٨
- ٩) للقيمتين ٩، ٨، ٧، ٦، ٥
- ١٠) للقيمتين ١٩، ١٨، ١٧، ١٦، ١٥
- ١١) للقيمتين ٢١، ١٨، ١٦، ١٣، ١٢

القيمتين	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
التكرار	١	٢	٣	٣	١	١٠

القيمتين	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
التكرار	٥	٧	٧	٥	٦	٣٠

المجموعات	-١٠	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

أكتب قوانين الانحراف المعياري

حصہ اول

① الفرق بين الأكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من المفردان انتهى...

٢) الدالة د (س) = ٦س^٧ - ٢س^٣ + ٥ - ٥ من الدرجة ٧

٣) إذا كان n (عدد) = ٣ ، n (عدد) = ٥ فإن n (عدد خاص) = ...

٤) الوسط القتناسب للعديدين ٨٦٢ هو٥

۵) اذا كان $\frac{p}{q} = \frac{n}{5} = \frac{p+q}{2s}$ فبان $s = 10$

6) اذا كان (س - 11) = (ص + 3) فيان (س + ص) = 14

۲) اذ اكان سه = {5, 3, 2}، صه = {1, 6, 7, 6, 5}، $P \cup Q = \{1, 6, 7, 6, 5, 5, 3, 2\}$

التب بياع ومثلها بمخططة سهى. هل ع دالت. اذ ل المدي

(5) اذا كان بوسط متناسب بين 6، 7 - الثبتان $\frac{p}{q} = \frac{u+p}{u+q}$

۳ مثل بیاباد (س) = (س ۱) حیت س ۳ [-۳۱] ومن الرسه

اوجد رأس المنحني ومعادلتها محور القاطل

٥) إذا كان $\frac{2}{3} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$ أوجد قيمة $\frac{3\text{ص} + 2\text{ص}}{6\text{ص} - \text{ص}}$

٤ اذا كان $v \propto \frac{1}{s}$ وكانت $v = 2$ عندما $s = 7$ فأوجد

العلاقة بين S ، V وأوجد قيمة S عندما $V=1$

⑤ مثل بیاناً د (س) = ۲ س - ۳

5. اذا كان $S = \{2, 3, 5\}$ ، $V = \{4, 6, 7\}$ فأوجد $S \times V$

٥) إذا كان التوزيع التكراري يوضح أعمار ١٠ أطفال

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

١ حسب الانحداف المعيارى للعرب السنوات

- ١ إذا كان $\frac{u+p}{u+p^2} = \frac{3}{5}$ فإن $\frac{p}{u} = \dots$
- ٢ النقطة $(-3, 4)$ تقع في الربع \dots
- ٣ إذا كان d (س) $= 3$ فإن d (ع) $= \dots$
- ٤ إذا كان $\frac{ص}{هـ} = \frac{ص}{هـ}$ فإن قيمة $(7س - 5ص + 3)$ $= \dots$
- ٥ d (س) $= 5س + 7$ من الدرجة \dots
- ٦ إذا كان $ص = \frac{5}{س}$ فإن $ص$ تتغير تغيراً \dots بتغير $س$
- ٧ إذا كان $م، ن، د، ع$ في تناسب متسلسل فاشتت أن $\frac{د}{ع} = \frac{م+ن}{د+ع}$
- ٨ إذا كان $س = \{7, 4, 1\}$ ، $ص = \{6, 3, 0\}$ $\{م\}$ $ن$ تعني $(7 > 6 + 1)$
- اكتب بياناً ومثالاً بخطوط مستقيمة مع دالة

- ٣ إذا كان $ص$ $م$ $س$ ، كانت $ص = 12$ عندما $س = 36$ فأوجد العلاقة بين $س$ ، $ص$ وأوجد قيمة $ص$ عندما $س = 60$
- ٥ إذا كان $س = \{7, 5\}$ ، $ص = \{4\}$ فإن $ص \times س$
- ٤ ارسم منحنى d (س) $= س - 4$ $س + 3$ على الفترة $[4, 6]$ وما الرسم اوجد رأس المنحنى ومعادلاته خط التماثل
- ٥ إذا كان $\frac{p}{3} = \frac{u}{3}$ فأوجد قيمة $\frac{u+p^2}{p-u}$

- ٥ عددان حقيقيان النسبة بينهما $3:7$ إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة $1:3$ فأوجد العددين
- ٦ احسب الانحراف المعياري للقياس: $10, 6, 9, 1, 7, 6, 8$

الحمد لله رب العالمين

أكمل: ١

١ الوسط المتناسب بين ٣، ١٢، ١٢ هو ...

٢ إذا كان $(٥، ٣) \in \{٦، ٣\} \times \{٨، ٣\}$ فإن $٣ =$...

٣ الرابع المتناسب للأعداد ٨، ٥، ٢ هو ...

٤ إذا كان $ص \propto \frac{١}{١٣}$ وكان $ص = ٣$ عندما $س = ١٦$ فإن ثابت التناسب = ...

٥ أحدى للقياس: ١٣، ٥، ٩، ٤، ٧ هو ...

٦ $(٣٧ + ٣٧)^9 (٣٧ - ٣٧)^9 =$...٢ إذا كان $\frac{٢}{٥} = \frac{ح}{س}$ فثبت أن $\frac{ح-٢}{س-٥} = \frac{ح}{س}$ ٥ إذا كان $ص \propto \frac{١}{س}$ وكان $ص = ٢$ عندما $س = ٤$ فأوجد العلاقة بين $ص$ و $س$ وأوجد قيمة $ص$ عندما $س = ١٦$ ٣ إذا كان $س = \{٣، ٢، ١\}$ ، $ص = \{٤، ٢\}$ ب تعني $(ب > ٢)$

أكتب بيان ح ومثلها بمخطط سهي حل ع د الت

٥ إذا كان $\frac{٢}{٣} = \frac{٥+٥-٢٢}{٣س} = \frac{ح}{٤} = \frac{٥}{٣} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة $س$

٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٦، ٢، ٤، ١

لحصلنا على أعداد متناسبة

٥ إذا كان $س = \{٢، ١، ٠\}$ فأوجد $س =$ ، مخطط سهي٥ إذا كان $٩س - ١٦ص = ٠$ حيث $س، ص \in \mathbb{Z}^+$ فأوجد $\frac{س}{ص}$

٥ احسب الإخفا المعياري

الدرجات	٠	١	٢	٣
عدد الطلاب	١	٢	٣	٤

الكل ١

١) اذا كان $٣ = (س) نه$ ، $٣ = (سه) نه$ \times $صه = ١٢$ فان $نه(صه) = \dots$ ٢) اذا كان $(٣ - ٢, ٥)$ تقع على محور السينات فان $٢ = \dots$ ٣) اذا كان $ص$ \times $س$ فبيان $\frac{ص١}{ص٢} = \dots$ ٤) $د(س) = ٣$ تمثل بياناً بخط \dots يوازي محور \dots ٥) اذا كان $٣, ٦, ١٢, ٦$ $س$ كميات متناسبة بيان \dots ٦) اذا كان $س - ٤ س ص + ٤ ص = ٠$ فان $ص \times \dots$ ٢) اذا كان $\frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$ فاثبت ان $\frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$ ٣) اذا كان $ص \times \frac{١}{س}$ وكان $ص = ١$ عند $س = ٣$ فأوجد $ص$ عند $س = ١٢$ ٣) اذا كان $سه = \{١٠, ٨, ٦, ٤\}$ ، $صه = \{٥, ٤, ٣, ٢\}$ ، $ب(نغني) = ٢$ " $٢ = ٢$ " آتب بيان $ع$ ومثلها بخط $س$ هي وأخر بيان٤) اذا كان $\frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$ فأوجد قيمة $س$ ٤) مثل بياناً $د(س) = س - ٢$ عند $س = ٣$ ومن الوصل

أوجد رأس المنحنى ومعادلة خط التماس

٥) اذا كان $\frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$ فاثبت ان $ص \times ٢$ ٥) اذا كان $\frac{١٥-٧}{١١+١٨} = \frac{١٥-٧}{١١+١٨}$ فوجد $\frac{١٥-٧}{١١+١٨}$ ٦) احسب الانحراف المعياري للقيم $١٩, ١٨, ١٧, ١٦, ١٥$

سبحان الله وبحمده

أكمل: ١

- ١ إذا كان (س، ٣) = (٥، ص - ١) فإن $\sqrt{\text{س} + \text{ص}} = \dots$
- ٢ العلاقة بين $\text{ص} = ٣$ فإنها تنصل تغييراً \dots
- ٣ الرابع التناسب للكلمتان ٣، ١٢، ٤، ٩ هو \dots
- ٤ الصدى للقيس ٣، ٨، ٥، ٢، ١٢ هو \dots
- ٥ د (س) = ٣ - من الدرجة \dots
- ٦ إذا كان $\text{س} = (٢، ٩) = (\text{س} \times \text{ص}) = ٦$ فإن $\text{س} = (\text{ص}) = \dots$

٢ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧: ١١ فإنها تصبح ٣: ٢

٥ إذا كان $\text{ص} = \frac{١}{٣}$ وكان $\text{ص} = ٨$ عندما $\text{س} = ٤$ فأوجد العلاقة بين س ، ص فـ س أوحد قيمة ص عندما $\text{س} = ١٦$

٣ إذا كان ب ووسط متناسب بين ٢، ج الثبتان $\frac{٢ - \text{ج}}{٣ - \text{ج}} = \frac{٢ - \text{ج}}{٢٣ - \text{ج}}$

٥ مثل بيانياً د (س) = ٢ + س + ١

وأوجد نقطتي التقاطع مع محوري الإحداثيات

٤ إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ فالثبتان $\sqrt{٣\text{س} + ٣\text{ص} + ٢\text{ع}} = ٢\text{س} + \text{ص}$

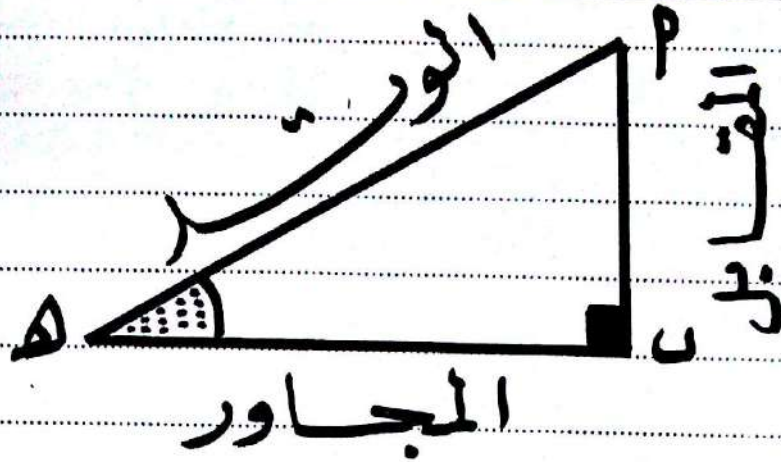
٥ إذا كان $\text{س} = \{٢، ٣، ٤، ٥\}$ علاقة على س حيث $\text{ع} \times \text{ب}$ تعني $(٢ + \text{ب} = ٧)$ أكتب بياناً ومثلها بمخطط سحرى

٥ إذا كان ٩ س - ٤ س ص + ١٦ ص = ٠ فالثبت أن $\text{ص} \times \text{س}$

٥ احسب الإخلاف المعيارى للقيس

١، ٦، ٩، ٨، ٧، ٦

النسب المثلثية للزاوية الحادة



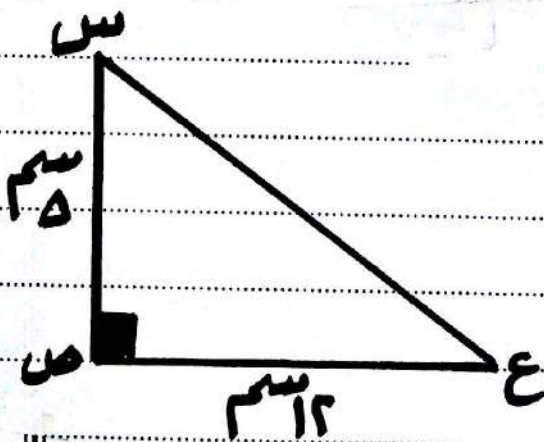
$$\text{جاءه} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جتاه} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{ظاه} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال:

بأستخدام فيثاغورس $س ع = ١٣$ سم



$$\text{حاس} = \frac{١٢}{١٣}$$

$$\text{جتاس} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\text{ظاس} = \frac{١٢}{٥}$$

$$\text{جاع} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\text{جتاع} = \frac{١٢}{١٣}$$

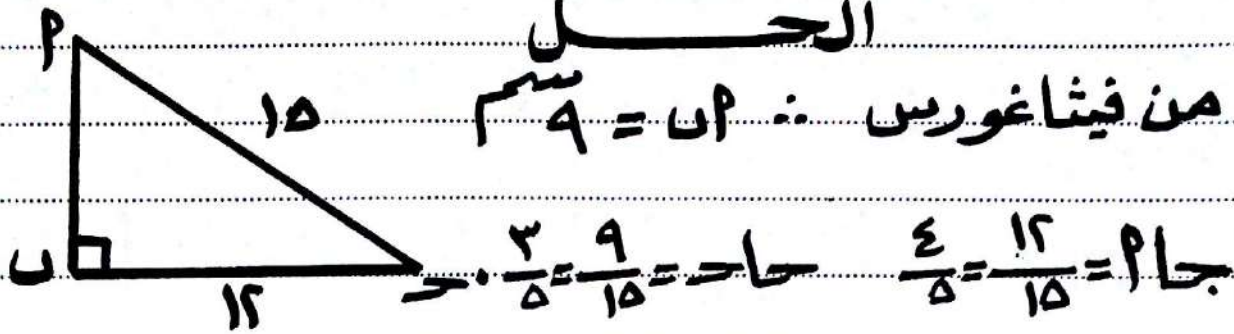
$$\text{طاع} = \frac{٥}{١٢}$$

٥٣

أشئلة محلولة

٢) Δ قائم الزاوية، $AB = 12$ سم، $AC = 15$ سم،
أوجد قيمة $\sin A + \cos A + \tan A$

الحل



من فيثاغورس $\therefore AB = 9$ سم

$$\sin A = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin A = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sin A = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

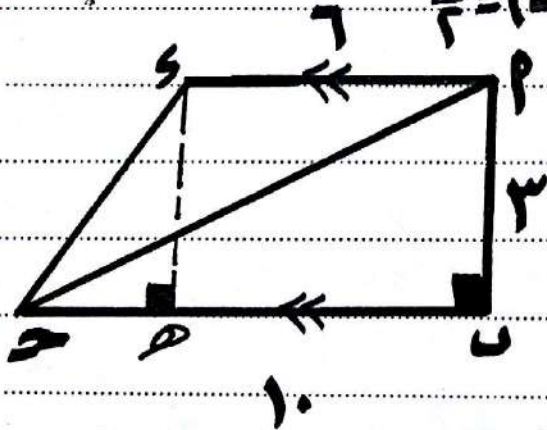
$$\therefore \sin A + \cos A + \tan A = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{3} = 1$$

$$\sin A + \cos A + \tan A = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{3} = 1$$

$$1 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{3}$$

٣) اثبت ان $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

الحل



نرسم عمود من B على AC في D

$$\therefore AB = 3, BC = 4, AC = 5$$

من فيثاغورس $\therefore AD = 9/5$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

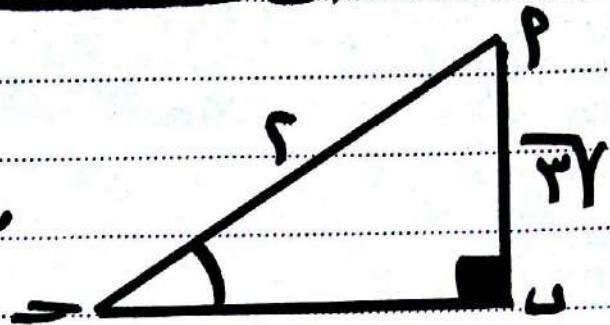
$$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

٤) أن - مثلث قائم في ب ، $٢٦ = ٣١$ ، ج -
 فاوجد النسب الثلاثية الأساسية لزواياه ج -

الحل

$$\frac{٣١}{٢} = \frac{٢٦}{١}$$

سرينثاغورس ب ج د = ١

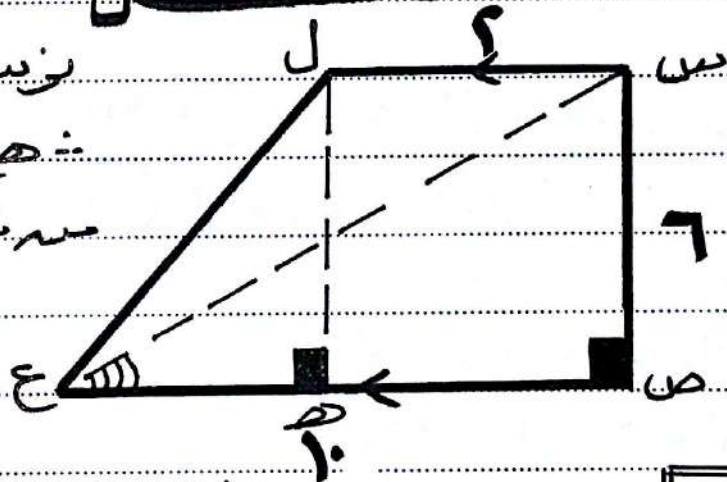


$$\frac{٣١}{٢} = \text{حاج} \quad \frac{١}{٢} = \text{حبا} \quad \frac{٣١}{١} = \text{طا}$$

٥) س ص ع ل شبة منحرف فيه : س ل // ص ع ،
 و (ص) = ٦ ، س ص = ٦ ، س ل = ٨ ، ص ع = ١٠ ،
 اثبت ان : ه حتا (ل غ ص) = ١ + ه طا (س غ ص)

الحل

نرسم ل ه ا ص ع
 ه ع = ٨ ، ل ه = ٦
 سرينثاغورس ل ع = ١٠

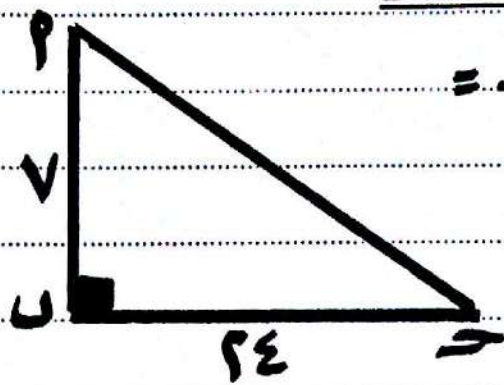


$$\text{الايمن} \quad ه حتا (ل غ ص) = ٨ \times \frac{٦}{١٠} = ٤$$

$$\text{الايسر} \quad ١ + ه طا (س غ ص) = ١ + ٦ \times \frac{٦}{١٠} = ٤$$

∴ الطرفان متساويان

تسمارين



١ اكل : حا = حاج =

حما = حجاج =

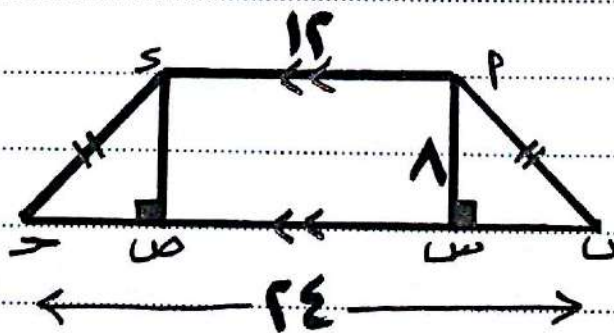
طا = طاج =

٢ ان ح د قائم في ح ، ان ح د = ١٣ سم ، ان ح د = ١٢ سم

اثبت ان : حا حبا + حبا حا = ا
٣ س ص ع د قائم في ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم
او جد قيمه حاس + حاص

٤ ان ح د قائم في ب ، ان ح د = ١٢ سم ، ب د = ١٦ سم

اثبت ان حا حاد = حبا حجاج
واوجد قيمه حا' (١ + طا')



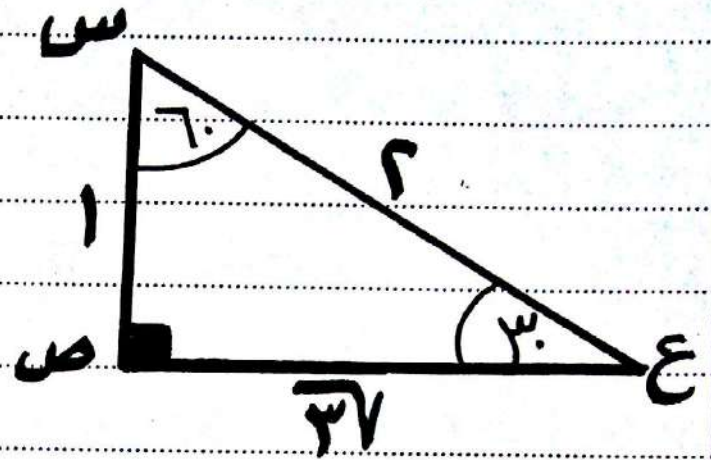
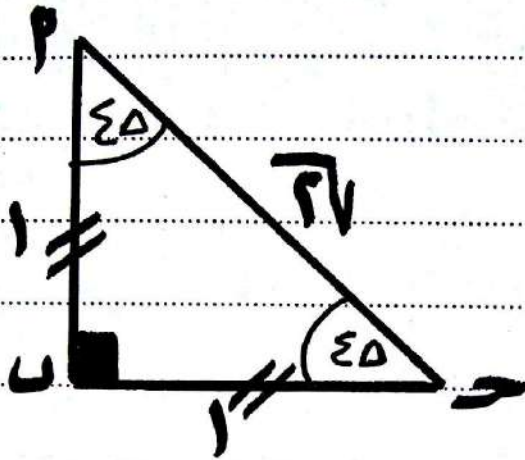
٥ ان ح د شبيه منحدف

$\overline{سح} \parallel \overline{پن}$
٦ سم ، ١٢ سم
٨ سم ، ٢٤ سم

فاوجد قيمه حاد حبا (ب ا س) + حبا حبا (ب ا س)

٦ اذا كان حا = ١٣ ، حبا = ١٢ فاوجد طا

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا الخاصة

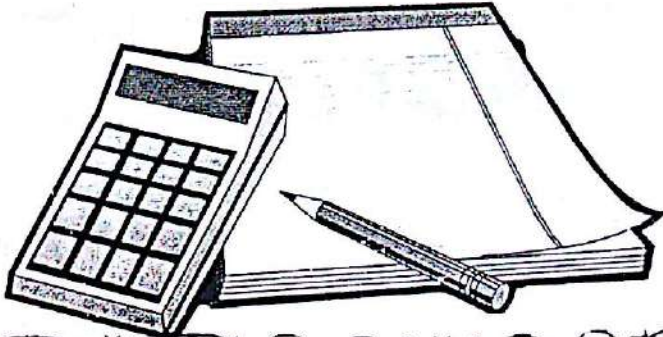


٤٥	٦٠	٣٠	الزوايا النسبة المثلثية
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	حا
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	حتا
١	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	طا

إذا كان $\alpha = 90^\circ$ فإن $\alpha + \beta = 90^\circ$

ملاحظة: $\frac{\text{طا}}{\text{حتا}} = \frac{\text{حا}}{\text{حتا}}$

الهندسة



البعد بين نقطتين

إذا كان $P = (س_١، ص_١)$ ، $Q = (س_٢، ص_٢)$
فإن البعد بين النقطتين $P، Q = \text{طول } \overline{PQ} =$

$$= \sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$$

١ إذا كان $P = (٦٢، ٧)$ ، $Q = (٦١، ٣)$ فإن
 $= \overline{PQ}$

٢ إذا كان $P = (٦٠، ٣)$ ، $Q = (٦٣، ٠)$ فإن
طول $\overline{PQ} =$

٣ بُعد النقطة $(٦٢، ٣)$ عن محور السينات
= قيمة الإحداثي السيني

٤ بُعد النقطة $(٦٢، ٣)$ عن محور السينات
= قيمة الإحداثي السيني

٥ بُعد النقطة $(٦٢، ٣)$ عن نقطة الأصل

$$= \sqrt{(السيني)^2 + (الصادي)^2}$$

٦٠

امثلة محلولة

٦ اثبت ان النقط $P(3, 4)$ و $Q(1, 1)$ و $R(-3, -5)$ تقع على استقامة واحدة

الحل

P	Q	R
-----	-----	-----

$$\begin{array}{r} 3-5- \\ 3 \oplus 4 \ominus \end{array}$$

$$\hline 7-69-$$

$$\sqrt{13} \mid 3 = \sqrt{36+81} =$$

$$\begin{array}{r} 1 \oplus 1 \\ 3 \oplus 4 \oplus \end{array}$$

$$\hline 2 \oplus 6$$

$$\sqrt{13} \mid 2 = \sqrt{16+36} =$$

$$\begin{array}{r} 3 \oplus 4 \\ 1 \oplus 1 \ominus \end{array}$$

$$\hline 2 \oplus 3$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{4+9} =$$

نلاحظ ان: $P = Q + R$ تقع على استقامة واحدة

٧ اثبت ان Δ س ص ع : س (٥, ٣) ، ص (٢, ٤) ، ع (-١, -٥) قائم الزاوية

قائم الزاوية ص

قائم الزاوية ص

الحل

ع س	ص ع	س ص
-----	-----	-----

$$10 =$$

$$10 \mid 3 =$$

$$10 \mid =$$

مربع البرضلع = (ع س) = (١٠) = ١٠٠

مجموع مربعي الضلعين الاخرين = (س ص) + (ص ع) = ٩٠ + ١٠ = ١٠٠

١٠٠ = ١٠٠ $\therefore \Delta$ قائم الزاوية ص

المساحة = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أضلاع

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 3 = 15$$

٦١

٨ اثبت ان النقط $P(2, 4), U(6, 0), S(0, 2)$ هي رؤوس مستطيل وأوجد مساحته

الحل

$$\begin{array}{ccc} P & S & U \\ \sqrt{2^2 + 4^2} & = & \sqrt{0^2 + 2^2} \\ \sqrt{20} & = & \sqrt{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U & P & S \\ \sqrt{6^2 + 0^2} & = & \sqrt{0^2 + 2^2} \\ \sqrt{36} & = & \sqrt{4} \end{array}$$

نلاحظ ان: $UP = US = 2$ ، $US = PS = 4$ ، $PS = PU = 6$ ، $PU = PS = 2$
مساحة المستطيل = الطول \times العرض
 $16 = \sqrt{20} \times \sqrt{4} = 16$ سم

٩ اثبت ان النقط $P(3, 1), U(4, 6), M(1, 7)$ تقع على دائرة مركزها $C(1, 2)$ وأوجد محيطها

الحل

$$\begin{array}{ccc} P & M & U \\ \sqrt{3^2 + 1^2} & = & \sqrt{1^2 + 7^2} \\ \sqrt{10} & = & \sqrt{50} \end{array}$$

$PM = MU = UP = 5$
∴ النقط تقع على الدائرة

$$\text{المحيط} = 2 \times \text{طول} = 2 \times \frac{22}{7} \times 5 = 35.4$$

$$\text{المساحة} = \text{طول} \times \frac{22}{7} = 5 \times \frac{22}{7} = 15.7$$

١٠ اذ كانت P (س، ١) على بعدين متساويين من النقطتين A (٢، ٤) و B (٣، ٣) فاوجد قيمة s

الحل

بعدين متساويين $AP = BP$

$$s = 1$$

$$3^2 + 3^2 = 2^2 + 4^2$$

$$s = 1$$

$$2^2 + 4^2 = 3^2 + 3^2$$

$$s = 3 - 6 = 2$$

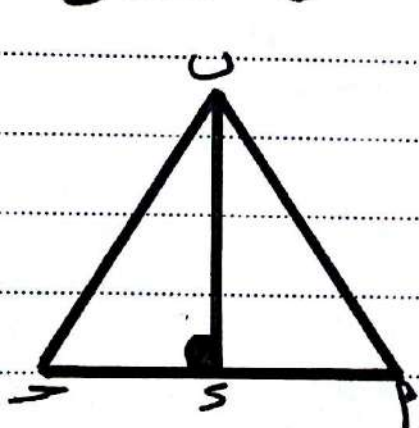
$$s = 4 - 1 = 3$$

تربيع

$$\sqrt{(s-3)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + (s-4)^2}$$

بالفك والتجميع $s = 2$

١١ اثبت ان المثلث الذي رؤوسه P (٢، ٥) و A (٦، ٣) و B (٤، ١) متساوي الساقين وأوجد مساحته **الحل**



$$AP = BP$$

$$\frac{2^2 + 5^2}{4^2 + 1^2} = \frac{6^2 + 3^2}{4^2 + 1^2}$$

$$\frac{29}{17} = \frac{45}{17}$$

$$29 = 45$$

$\therefore AP = BP \therefore \Delta$ متساوي الساقين

$\therefore PS \perp AB$ \therefore ينصف $\therefore PS = \frac{1}{2} AB$ $\therefore PS = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

من فيثاغورس $\therefore (AP)^2 = (BP)^2 = (PS)^2 + (AS)^2$ $\therefore 29 = 1 + AS^2$ $\therefore AS^2 = 28$ $\therefore AS = \sqrt{28}$

\therefore مساحته $\Delta = \frac{1}{2} \times AB \times PS = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ وحدة مربعة

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان M (س، ص)، N (س، ص) وكان A منتصف

$$AN \text{ فإن إحداثي نقطة } M = \left(\frac{س_1 + س_2}{2}, \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$$

① إذا كان M (٦، -١)، N (٩، ٢) فإن إحداثي منتصف AN

$$= \left(\frac{٩ + ٦}{2}, \frac{٢ + (-١)}{2} \right) = (٥, -٠.٥)$$

② إذا كان M منتصف AN حيث A (٢، ٣)، M (٢، -٥)

فاوجد إحداثي نقطة B

الحل
 M منتصف AB

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{2}, \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right) = (٢, -٥)$$

$$\frac{س + ٢}{2} = -٥ \quad \frac{ص - ٣}{2} = ٢$$

$$\therefore س = -١٢ \quad \therefore ص = ٧$$

$$\therefore \text{نقطة } B = (-١٢, ٧)$$

طريقة أخرى:

النقطة المطلوبة = $A \times \frac{١}{2}$ - النقطة المعروفة

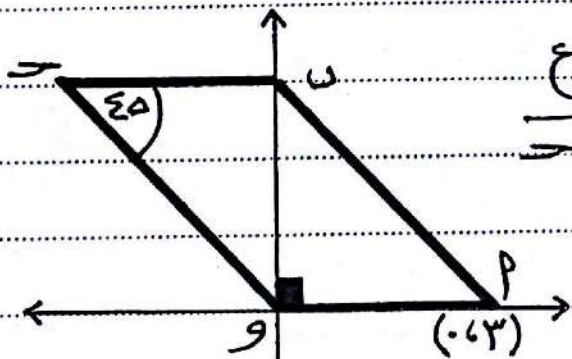
٦٤

٣) إذا كان $P \in$ محور السينات \Rightarrow محور الصادات $\Rightarrow (1, 2)$ منتصف \overline{MP} فاوجد إحداثي M الحل :- $P \in$ محور السينات $\therefore P = (س, 0)$
 $\therefore B \in$ محور الصادات $\therefore B = (0, ص)$ \therefore منتصف \overline{MP}

$$\left(\frac{س+0}{2}, \frac{0+ص}{2} \right) = (1, 2)$$

$$\therefore س = 2 \quad \therefore ص = 4$$

$$P(-4, 0) \quad B(0, 2)$$

٤) في الشكل $MP \perp$ MD متوازي أضلاعأوجد نقطة B واحدات منتصف \overline{MP}

الحل

$$\therefore \hat{C} = (\hat{x}, \hat{y})$$

$$\therefore \hat{C} = (\hat{P}, \hat{M})$$

$$\therefore \triangle MP \text{ ومتساوي الساقين } O = P \quad \therefore O = (3, 0)$$

$$\therefore P = O = (3, 3) \quad \therefore$$

$$\therefore$$
 منتصف $\overline{MP} = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{3-3}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$

٥) إذا كان $M(1, -6)$ ، $B(9, 2)$ أوجد إحداثياتالنقطة التي تقسم \overline{MP} إلى أربعة أجزاء متساوية الطول٦) إذا كان $(3, 2)$ منتصف \overline{MP} حيث $M(5, ص)$ $B(ص, ٧)$
 فاوجد $(س, ص)$

ميل الخط المستقيم

١ إذا كان $M (س١، ص١)$ ، $N (س٢، ص٢)$ فإن

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{MN} = \frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

٢ ميل المستقيم = طاله

حيث \angle : الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٣ ميل المستقيم $أس + ص + ح = ٠$

$$\text{يساوى} = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

ملاحظات:

١ إذا كان المستقيم // محور السينات فإنه ميله = صفر
٢ إذا كان المستقيم // محور الصادات فإنه ميله غير معرف

١ ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٤، ٥)$ ، $(٢، ٣)$ هي ...

٢ ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع $س١$ هي ...

٣ ميل المستقيم الذي معادلته $٣س - ٥ص + ٧ = ٠$ هي ...

٤ ميل المستقيم العمودي على محور الصادات هو ...

العلاقة بين ميل مستقيمين متوازيين

يتوازي المستقيمان l, l' ، لـ إذا كان

ميل الأول = ميل الثاني

$$m = m'$$

١ اثبت ان المستقيم الطارب بالنقطتين (١، ٢) - (٣، ٦) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m' = \tan 45^\circ = 1$$

∴ $m = m'$ ∴ المستقيمان متوازيان

٢ إذا كان المستقيم $l \parallel l'$ // محور السينات حيث $P(4, 2)$ ، $Q(5, -5)$ فابجد قيمته m .

٣ إذا كان المستقيم $l \parallel l'$ // محور الصادات حيث $P(7, 5)$ ، $Q(3, 5)$ فابجد قيمته m .

العلاقة بين ميل مستقيمين متعامدين

يتعامد المستقيمان l, m إذا كان:

$$m_1 \times m_2 = -1 \quad m_1 = \frac{1}{m_2} \quad m_2 = \frac{1}{m_1}$$

١ إذا كان $P(3, 4)$ و $Q(-1, 6)$ فاشبت أن $\overleftrightarrow{PQ} \perp$

المستقيم الذي معادلته $8x + 6y + 1 = 0$.

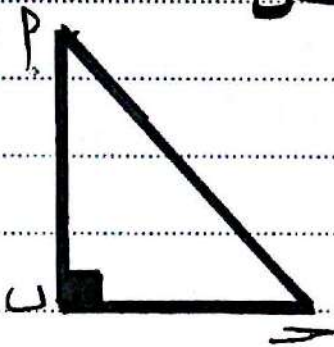
الحل ميل $\overleftrightarrow{PQ} = m_1 = \frac{6-4}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

ميل $8x + 6y + 1 = 0$ ليساوي $-\frac{1}{2}$ $\frac{6-8}{3-1} = -1$

$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \therefore \overleftrightarrow{PQ} \perp l$

٢ أوجد قیمة x إذا كان $P(1, 2)$ و $Q(-2, 6)$ و $R(2, 5)$

رؤوس Δ قائم فی B **الحل**



ميل $\overleftrightarrow{PQ} = m_1 = \frac{6-2}{-2-1} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

ميل $\overleftrightarrow{QR} = m_2 = \frac{5-6}{2-(-2)} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\therefore \Delta$ قائم أي أن $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{QR}$

$\therefore -1 = \frac{6-5}{x-2} \times \frac{4}{-3}$

$\therefore -1 = \frac{6-5}{x-2} \therefore x = 9$

٢ إذا كان المستقيم L يصرّب بالنقطتين $(1, 3)$ ، $(2, 4)$ والمستقيم M يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45° . أوجد قيمة $L \parallel M$ إذا كان $L \perp M$ $L \perp M$

الحل

$$L \perp M \quad \therefore m_L \times m_M = -1$$

$$1 = 1 \times \frac{1-L}{3-2}$$

$$\therefore L = 2$$

$$L \parallel M \quad \therefore m_L = m_M$$

$$\frac{1-L}{3-2} = \text{طاه}$$

$$\therefore L = \text{صفر}$$

٤ إذا كان $\frac{3}{4}$ ميل مستقيم ما فإن ميل المستقيم الموازي $\frac{3}{4}$ ميل المستقيم العمودي $-\frac{4}{3}$

٥ إذا كان M ، M مستقيمين متوازيين فإن $M - M = \text{صفر}$

٦ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم L مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. إذا كان المستقيم M يصرّب بالنقطتين $(3, 4)$ ، $(5, 6)$

الحل

$$\text{الميل} = \text{طاه}$$

$$4 = \text{طاه}$$

$$\therefore \text{Shift tan}(4) = 75^\circ 57' 50''$$

$$\begin{array}{r} 3, 4 \\ 5, 6 \\ \hline 1, 2 \end{array}$$

٦٩

٧ اثبت ان النقط $پ(٥,٣)$ ، $و(٧,١)$ ، $د(٣,٥)$ و $س(٥,١)$ رؤوس متوازي أضلاع **الحل**

$پ$ $و$ $د$ $س$

$$\begin{array}{r} ٥-١ = س \\ \oplus \ominus \\ ٥,٣- = پ \\ \hline ١٠-٤ \end{array}$$

$$\frac{٥-}{٢} = \text{الميل}$$

$$\begin{array}{r} ٣-٥ = د \\ \oplus \ominus \\ ٥-١ = س \\ \hline ٢-٤ \end{array}$$

$$\frac{١}{٢} = \text{الميل}$$

$$\begin{array}{r} ٧-١ = و \\ \oplus \ominus \\ ٣-٥ = د \\ \hline ٤- \end{array}$$

$$\frac{٥-}{٢} = \text{الميل}$$

$$\begin{array}{r} ٥,٣- = پ \\ \oplus \ominus \\ ٧,١- = و \\ \hline ٢-٤- \end{array}$$

$$\frac{١}{٢} = \text{الميل}$$

$$\frac{٢٩}{٢} = \frac{١٠٠+١٦}{٢} = ٥٧,٢ = \frac{٤+١٦}{٢} = \frac{٢٩}{٢} = \frac{١٠٠+١٦}{٢} = ٥٧,٢ = \frac{٤+١٦}{٢} =$$

كل ضلعين متقابلين متوازيين متساويين
 $\therefore پ د و س$ متوازي أضلاع

٨ اذا كان $پ(٤,٢)$ ، $و(٤,٥)$ ، $د(٧,٨)$ على استقامة واحدة فاوجد قيمة $ص$. **الحل**

$$\text{ميل } پ = \text{ميل } و = \text{ميل } د$$

$$\begin{array}{r} ٨-٧ = د \\ \oplus \oplus \\ ٤-٢ = پ \\ \hline ١٢-٩ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٤-٢ = و \\ \oplus \oplus \\ ٤-٥ = پ \\ \hline ٤+٥-٦ \end{array}$$

$$\therefore \frac{٤}{٣} = \frac{٤+ص}{٦} \therefore ص = ١٢$$

٩ اذا كان $پ(٧,١)$ ، $و(٥,١)$ ، $د(٤,٢)$ فاثبت ان $پ و س$

كيفية حل التمارين

١، ٢، ٣، ٤، ٥ فقط معلومة. لاثبات:

١ استقامة واحدة مجموع أصغر جزئين = الجزء الأكبر

٢ المثلث مجموع أصغر ضلعين < الضلع الأكبر

٣ المربع الاضلاع متساوية، القطران متساويان

٤ المستطيل كل ضلعين متقابلين متساويين - القطران متساويان

٥ المربع الاضلاع متساوية

٦ شبه المنحرف ضلعين متقابلين متوازيين غير متساويين

٧ دائرة مركزها م $MA = MB = MC = MD = ME = NF$

٨ متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين

٩ Δ قائم مربع أكبر ضلع = مجموع مربعي أصغر ضلعين

١٠ مساحة المربع = طول الضلع \times نفسه

١١ مساحة المستطيل = الطول \times العرض

١٢ مساحة Δ القائم = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أصغر ضلعين

١٣ مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

تمارين

الكل

٧١

- ١ بعد النقطة (٣، ٥) عن محور الصارآن = ...
- ٢ البعد بين (٣، ١٦)، (٧، ٢) ليساوى ...
- ٣ منتصف \overline{AN} هي ... حيث $M(٧، ١٠)$ ب (٢، ٥٦)
- ٤ اذا كان Δ (١٦، ٢) منتصف \overline{AN} حيث $M(٣، ٥٦)$ فان ب = ...
- ٥ ميل المستقيم الذي يوضع مع \overline{SP} زاوية $٤٥^\circ = \dots$
- ٦ $MP \perp \Delta$ قائم في ن : $M(١٦، ٤)$ ب (١، ٢) فان ميل \overline{N} $\rightarrow = \dots$
- ٧ المستقيم المار بالنقطة (٣، ٤٦) موازياً لمحور السينات معارلته هي ...
- ٨ المستقيم ٢ ص = ٣ س - ٥ ميله = ... ويقطع \overline{SP} محور الصارآن جزئاً طوله ... وحواله
- ٩ اذا كان $M(٥، ٠)$ ب (١٢، ٤) فان $MP = \dots$
- ١٠ المستقيمان س = ٣ ص - ٤ س = ٥ يكونا ...
- ١١ اذا كان ٢ ص + ١ س = ١٠ يوازي ٣ ص + ٣ س = ١٠ فان ٢ ص = ...
- ١٢ اثبت ان النقط $M(٣، ١)$ ب (١٤، ٦) ح (٢، ٦٢) تقع على دائرة مركزها $M(١، ٢)$ وأوجد مساحة الدائرة
- ١٣ اثبت ان النقط $M(٦، ٠)$ ب (٢، ٤٦) ح (٤، ٢) هي رؤوس Δ قائم في ن . وأوجد مساحته
- ١٤ اثبت ان $M(٣، ٣٦)$ ب (١، ١٦) ح (٣، ٦٣) د (١، ١٦) هي رؤوس معين وأوجد مساحته ومحيطه
- ١٥ اذا كان $\overleftrightarrow{MP} \parallel$ محور السينات : $M(٤، ٢)$ ب (٥، ٥) فأوجد ص

معادلة الخط المستقيم

١ معلومية الميل والجزء المقطوع منه محور الصادات

$$ص = م س + ح$$

سأل: اوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{2}{3}$ ويقطع منه الجزء السالب لمحور الصادات جزءاً طوله ٥ وحدات

الحل

$$ص = م س + ح$$

$$ص = \frac{2}{3} س - ٥$$

٢ معلومية ميل ونقطته

$$ص = م س + ح$$

$$ص - (م س) = ح$$

سأل: اوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{2}{3}$ ويمر بالنقطة (٤، ٥)

الحل

$$ص = م س + ح$$

$$ص = \frac{2}{3} س + ح$$

$$\therefore ح = ص - (م س) = ٥ - (٤ \times \frac{2}{3}) = \frac{١٢}{3}$$

$$\therefore ص = \frac{2}{3} س + \frac{١٢}{3}$$

تمرينه: اوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ماراً بالنقطة (٥، ٢)

تمرينه: اوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{3}{5}$ ماراً بالنقطة (٢، ٥)

مثال: اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣-٤٢) (٧-٤١)
الحل

$$\begin{array}{r} 3-42 \\ \oplus \quad \oplus \\ 7-41 \\ \hline 4-3 \end{array}$$

$$ص = ٣س + ح$$

نوجد الميل من النقطتين
فإننا نأخذ أحد النقطتين

ونعوض بها مكان س، ص في المعادلة لإيجاد ح

$$ص = ٣س + ح \quad \text{ص} = ٤ - ٣س$$

$$١٧ = ٣ + ٢ \times \frac{٤}{٣} + ح \quad \therefore \frac{١٧}{٣} = ح$$

$$\therefore ص = ٣س - \frac{٤}{٣} - \frac{١٧}{٣}$$

ملاحظات هامة:

من معادلة المستقيم $٣س + ح = ١$

● ميل المستقيم = $\frac{٣}{١} = \frac{٣}{١}$ - ميل س

● طول الجزء المقطوعه محور الصادات = $|\frac{٣}{١}|$

من الأفضل إذا كانت معادلة المستقيم معلومة

يجب أن تكون = صفر

● المستقيم يقطع محور الصادات في $(٠, \frac{٣}{١})$

ملاحظات هامة

٧٤

١ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل :
(٠، ٠)

$$ص = ٣س$$

٢ معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات وعمر بالنقطة (٢، ٠) :

$$ص = ٢$$

٣ معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات وعمر بالنقطة (٠، ١) :

$$س = ١$$

٤ معادلة محور السينات :
ص = ٠

٥ معادلة محور الصادات :
س = ٠

١ اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤، ٣) موازياً للمستقيم

$$٢س - ٥ص + ٩ = ٠ \quad \text{الحل}$$

بيل التقييم المعلوم = $\frac{٢}{٥}$

$$ص = ٣س + ح$$

$$٢ - ٤ \times \frac{٢}{٥} = ح \quad \therefore \frac{٢٣}{٥} = ح$$

$$\therefore ص = \frac{٢}{٥}س - \frac{٢٣}{٥}$$

٢) اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤، ٢) وموازياً للمستقيم $3س + ٢ص - ٤ = ٠$

الحل

$$ص = ٢ - ٣س$$

$$٢ + ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٤$$

$$\therefore ١ = ٢ - ٣س \quad \therefore ص = ٢ - ٣س + ١$$

ميل المستقيم المعلوم

$$\frac{٣}{٢} =$$

٣) اوجد معادلة المستقيم المار بنصف \overline{PQ} حيث $P(٣، ١)$ و $Q(٥، ٣)$ ويكون موازياً للمستقيم $3س - ٢ص - ٧ = ٠$

الحل

$$ص = ٢س - ٧$$

$$ص = \frac{٣}{٢}س - ٧$$

$$٢ + ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٤$$

$$\therefore ١ = ٢ - ٣س \quad \therefore ص = ٢ - ٣س + ١$$

نصف \overline{PQ}

$$\left(\frac{٥+٣}{٢}, \frac{٣+١}{٢} \right)$$

$$= (٤، ٢)$$

ميل المستقيم المعلوم

$$\frac{٣}{٢} =$$

٤) اوجد معادلة المستقيم الذي يملك ميله يساوي ميل المستقيم $3ص - ٢س = ٠$ وينقطع مع محور الصادات عند ٤ و ٥

٥) اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٢) ونقطة الأصل

ملخص معادلات الخط المستقيم

١ معادلة المستقيم الذي ميله k و يقطع من محور الصادات j في a هو

$$y = kx + j$$

$$y - j = k(x - a)$$

٢ معادلة المستقيم الحار بنقطتين: (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نأخذ أحد النقطتين ونفرض بها مكان x ، y لليجاد k حيث $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $y - y_1 = k(x - x_1)$

٣ معادلة المستقيم بعلومية ميل ونقطة: نفرض بالنقطة مكان x ، y لاجاد k حيث $k = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ $y - y_1 = k(x - x_1)$

٤ ميل المستقيم $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ليساوي $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

٥ ميل العمودي على k $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ ليساوي $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

٦ طول الجزء المقطوع من محور الصادات يساوي $|j|$

٧ ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = صفر

٨ ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات غير معرف $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

٩ معادلة المستقيم (x_1, y_1) $y - y_1 = k(x - x_1)$

الموازي لمحور السينات ويعبر بالنقطة (x_1, y_1) $y = y_1$

الموازي لمحور الصادات ويعبر بالنقطة (x_1, y_1) $x = x_1$

١٠ معادلة محور السينات $y = 0$ معادلة محور الصادات $x = 0$

معادلات المستقيم

تباديل على معادلة الخط المستقيم اكل

- ١ ميل المستقيم المار بالنقطة (-٤٦١) ، $(٢-٢)$ هو ... ميل العمودي عليه هو ...
- ٢ المستقيم $٣س + ٢ص = ٧$ ميله ... ويقطع محور الصادات في جزء طوله ... ماراً بالنقطة $(٦،)$
- ٣ معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٣٦٢-)$ ويوازي محور السينات هي ...
- ٤ معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٢-٦٥)$ ويوازي محور الصادات هي ...
- ٥ معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٧-٦٢)$ وميله صفر هي ...
- ٦ اذا كان المستقيم $٤س + ٣ص + ٧ = ٢٦$ - $٢س - ٢ص + ٣ = ٠$ متوازيين فإنه $٢ = ٠$...
واذا كانا متعامدين فإنه $٢ = ٠$...
- ٧ المستقيم $٥س = ٥ص - ٧$ يصنع زاوية موهبة مع سهم قياسه ...
- ٨ اذا كان $٢س // ٢ص$ $٢(٥-٦٢)$ ، $٢(٤، ٤)$ فإنه $٢ = ٠$...
- ٩ اذا كان $٢(٤، ٣)$ ، $٢(١-٦٥)$ ، $٢(٥، ٣)$ فاحد معادلاته المستقيمة المار بالرأس ٢ وينصف ٢ ...
- ١٠ $٢س - ٢ص$ متوازي أضلاع فيه $٢(١-٦٣)$ ، $٢(٢٦٦)$ ، $٢(٧٦١)$...
أوجد احداثي نقطة $ك$ ومعادلتها $٢س$...
- ١١ اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٥-٦٣)$ ويوازي المستقيم الذي معادلتها $٢س + ٢ص - ٧ = ٠$...
- ١٢ اوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات طوله ٧ وعمودي على المستقيم المار (٤٦٠) ، $(٢-٦٦)$...
- ١٣ اوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويعبر $(٢-٦٥)$...
- ١٤ اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢٦٣) ، (٠٦٥) ...
- ١٥ اوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الاحداثين السيني والصادي جزأين موجبين طولهما ٣ ، ٤ على الترتيب.

تسمارين عامتا

- ١ منتصف \overline{AN} هو حيث $P(١٠, ٣)$ و $Q(٥, ١)$
- ٢ ميل المستقيم الموازي لمحور السينات =
- ٣ اذا كان Q هيا $S = \frac{1}{2}$ فانه Q (س) الحادة =
- ٤ البعد بين $(٣, ٤)$ ونقطة الأصل =
- ٥ ميل المستقيم $٣٥٣ = ٩س - ١٥$ هو ميل العمودي =
- ٦ $M(١, ٢)$ مياي مستقيم متوازيين فانه $M(١, ٢) =$
- ٧ $M(١, ٢)$ مياي مستقيمين متعامدين فانه $M(١, ٢) =$
- ٨ ٤ هيا ٣ طاه $=$
- ٩ اذا كان Q هيا $(س + ٢) = \frac{1}{2}$ فانه Q (س) الحادة =
- ١٠ المستقيم $٤٥٥ = ٣س + ١٢$ يقطع محور الصاداتا جزء طوله =
- ١١ ٦٠ حيا + ٣٠ هيا - ٦٠ طاه =
- ١٢ المستقيمان $٣س + ٢ص = ٥$ و $٤س + ٦ص =$ فانه ٤ =
- ١٣ اذا كان M // محور S و $M(-٣, ١)$ و $B(٢, ٤)$ فانه $ص =$
- ١٤ اذا كان $M(٣, ٢)$ منتصف \overline{AN} حيث $P(٧, ٥)$ فانه $٥ =$
- ١٥ بُعد النقطة $(٥, ٣)$ عن محور السينات =
- ١٦ بُعد النقطة $(٥, ٣)$ عن محور الصاداتا =
- ١٧ بُعد النقطة $(٤, ٣)$ عن نقطة الأصل =
- ١٨ اذا كان $٤س = \frac{1}{2}$ فانه $س =$
- ١٩ مستقيم يله $=$ ا فانه يضع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية =
- ٢٠ اذا كان طاه $= ٤$ هيا ٦٠ حيا ٣٠ فانه ٤ الحادة =
- ٢١ المستقيم الذي يبلأ حيا $\frac{٥}{٣}$ و $\frac{٣}{٥}$ يكون اسمه =
- ٢٢ اذا كان نقطة الأصل $ص$ منتصف \overline{AN} حيث $P(٥, ٢)$ فانه $٢ =$
- ٢٣ قطر الدائرة التي مركزها $(٥, ١)$ ونقطتها $(٢, ٤)$ تساوي ...

- ١) اذا كان $M(3, 5), N(7, 1)$ فإن إحداثي منتصف AN هي ...
- ٢) ٤ حتا ٣ طا ٦ = ...
- ٣) اذا كان المستقيمان ٣ س $+ ٢$ ص $= ٥$ ، ٤ س $+ ٦$ ص $= ٠$ متوازيان فإين ٤ = ...
- ٤) اذا كان حتا س $= ٦$ ، فإين س $= ٠$...
- ٥) ميل المستقيم ص $- ٢$ س $= ٧$ هو ... وميل العمودي $= ٠$...
- ٦) بُعد النقطة $(٥, ٣)$ عن محور السينات = ...
- ٧) اثبت ان $M(3, 4), N(1, 1), D(5, 2)$ على استقامة واحدة
- ٨) بدون الآلة الحاسبة اثبت ان: ٤ طا $= ٣$ حتا $+ ٦$ حتا
- ٩) اوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من الجزء السالب لمحور المصادرات جزء طوله ٣ وحدات ويوازي المستقيم ٣ س $- ٢$ ص $= ٧$
- ١٠) ٢ س $- ٤$ حتا $= ٦$ ، ٢ س $- ٥$ حتا $= ٢$ ، ٢ س $- ٤$ حتا $= ٢$ اثبت ان: حتا $- ٢$ حتا $- ٢$ حتا $= ٢$ صفر
- ١١) اذا كان المستقيم ٢ س $+ ٢$ ص $= ٣$ موازياً للمستقيم المار بالنقطتين $(٣, ٢), (٥, ١)$ فأوجد قيصته ٢
- ١٢) اثبت ان النقط $M(3, 1), N(4, 6), D(2, 2)$ تقع على دائرة مركزها $M(2, 1)$ شعاعها ٢ محيط الدائرة
- ١٣) اذا كان $M(2, 3), N(5, 0)$ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ٢ س $- ٢$ حتا $= ٤$ اذا كانت ٢ منتصف ٢ هـ
- ١٤) اثبت ان المثلث $M(4, 1), N(1, 2), D(2, 3)$ قائم الزاوية واوجد مساحة سطحه
- ١٥) اذا كان ٤ طا $= ٦$ طا $+ ٣$ فإين ٥ (هـ) = ...

1

①

⑤

3

⑤

④

7

٦

.....

④

3

.....

و

1.

⑤



§

...

.....

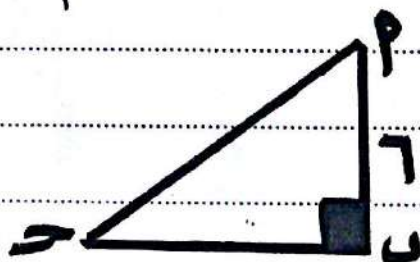
④..

△

④

فاد:

.....



1

- ۲ اثبت ان $P(4,2) = 6$ و $P(5,3) = 60$ (۱۶۷) ۵۶ (۱۶۰)

⑤ اذا كان 3 جاه = 4 حاه + 4 حناه + 3 حاه + 6 حناه + 2 حناه فاجده

٣ اوجد معادلة المستقيم العاربا بالنقطة (٣-٢) عمودياً

عالي المستقيم ٤ س - ٥٥ + ٧ =

٥) ا ج مثلث قائمہ فی ج : $P(-1, 6)$ ، $Q(5, 1)$ ، $R(2, 5)$ فأوجد مس

٤ إذا كان المستقيمان ℓ و m ، $\ell \parallel m$ ، $\angle 1 = x^\circ$ و $\angle 2 = y^\circ$ ، فاحسب $x + y$.

متعلما امدان فاوجد قيصتا ۲

② n - مثلث قائمہ فی ج: $u_1 = 13$, $u_2 = 12$ فائز

النسب المثلثية الأساسية لزاوية P

٥ اوجد معادلة المستقيم الذي ميله 3 ويمر بنقطة الأصل.

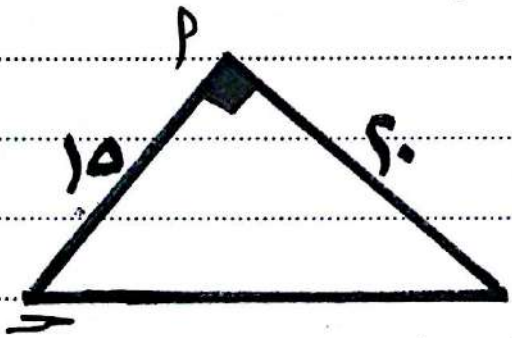
٥) س ص ع ل شبيهة من حروف، س ل // ص ع ، وه (ض) = ٩٠.

س ۶ = ص ، س ۷ = ل ، ص ۸ = ع ، س ۹ =

الثبتان: $h = 1 - (l \hat{e}^u) - (s \hat{e}^u)$

١. اكل :

١. اذا كان $\frac{1}{37}$ (س) = $\frac{1}{37}$ ف $\frac{1}{37}$ س = ...
٢. المستقيم ٢ ص - ٥ س = ... ميل = ...
٣. حنا ٦ - حنا ٣٠ = ...
٤. اذا كان $(١, ٢)$ منتصف \overline{AB} حيث $B(٠, ٣)$ فان $P = ...$
٥. P حنا مثلث قائم في B حيث $P(٤, ١)$ ، $B(-١, ٢)$ ف $\frac{1}{37}$ ميل \overleftrightarrow{AB} يساوي ...
٦. بُعد النقطة $(٥, ٣)$ عن محور المصادات = ...
٢. اوجد قيمة \sin اذا كان $P = ٥$ و \overline{AB} حيث $P(٥, ٢)$ ، $B(١, ٧)$
٥. اذا كان $P(٣, ٣)$ ، $B(٩, ٥)$ ، $C(٧, ١)$ ، $S(-١, ٣)$ ف اثبت ان $\triangle ABC$ قائم في P ان الشكل P ب ج د معين
٣. اوجد قيمة \sin اذا كان : $\sin ٣٠^\circ = ٣٠$ حنا ٦ + حنا ٣٠ حنا ٦٠
٥. اذا كان $P(-١, ٣)$ ، $B(٣, ٤)$ ، $C(٧, ٧)$ ف اثبت ان $\triangle ABC$ متساوي الساقين واوجد مساحته



٤. هذا الشكل المقابل :

اثبت ان

حنا حنا - حنا حنا = ...

٥. اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٥, ٠)$ وعمودي على

المستقيم المار بالنقطتين $(٢, ١)$ ، $(٨, ٣)$

٥. اذا كان $P(٠, ١)$ ، $B(٤, ١)$ ، $C(٨, ٧)$ ، $S(٤, ٩)$

اثبت ان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وليساويهما في الطول

اثبت ان $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ = ٩٠

اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين P ، C

١ أكمل

١ إذا كان ط^٣ س = ا فبان س = ...

٢ المستقيم ع ص = س^٣ + ٨ يقطع محور الصادات في (٦)

٣ مساحة المثلث المحدد بمحوري الإحداثيات والمستقيم

س^٣ - ع ص = ١٢ تساوى ...

٤ إذا كان م منتصف م ن ، م (٥، ٣) ، ن (١، -١) فبان م = ...

٥ إذا كان س (١، -٩) ، ص (١، -٤) فبان طول س ص = ...

٦ ح ا ٦ ح تا ٣ ظ ا ه ع = ...

٢ أوجد قيمة م ، ن التي تحقق أن النقطة (٢، ٣ - م - ن)

منتصفاً للقطعة التي طرفاها (١، -٦) ، (٣، ٧)

٥ بدون الآلة الحاسبة أوجد قيمة س

إذا كان ح تا س = $\frac{\text{ح ا ٦ ح ا ٣}}{\text{ط ا ه ع ح ا ه ٤}}$

٣ إذا كان م (٢، ٥) ، ن (٢، -٣) ، ح (٤، -١) ، د (٣، ٦) فاثبت

أن الشكل م ن د ح يشبه من ح ر ف

٥ إذا كان ح د // محور السينات حيث ح (٤، ٢) ، د (٥، -٥) ص

فأوجد قيمة ص

٤ أوجد معادلة المستقيم العارِبِ بالنقطتين (٥، -١) ، (٢، -٧)

٥ م ح د م د ب ع : م (٣، ٢) ، ح (٤، -١) أوجد معادلة قطريه

٥ اثبت أن المستقيم العارِبِ بالنقطتين (٣، ٢) ، (٠، ٠) يوازي

المستقيم ا ص = س^٣ + ٥

٥ إذا كان ل م مستقيم مارِبِ بالنقطتين (٠، ٢) ، (٣، ٠) ، ل م مستقيم

يصنع زاوية ٣ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان

ل ل ل ل فوجد قيمة م